ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ

2006

1. Το ρεύμα μετατόπισης προστέθηκε θεωρητικά από τον Maxwell στην εξίσωση του Ampere ($\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{j}$) προκειμένου η τελευταία να είναι συνεπής με την εξίσωση συνέχειας του φορτίου ($\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$). Για ποιόν λόγο κατά τη γνώμη σας δεν είχε παρατηρηθεί πειραματικά έως τότε;

Η δημιουργία των μαγνητικών πεδίων στα πειράματα εκείνης της εποχής περιοριζόταν από τους φυσικούς μαγνήτες ($\omega = 0$) και από τους ηλεκτρομαγνήτες που διαρρέονταν από χαμηλής συχνότητας ρεύματα. Η φύση και η διάδοση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ήταν άγνωστη. Το ρεύμα μετατόπισης στα αγώγιμα υλικά (δηλ. στο σύρμα των ηλεκτρομαγνητών) είναι αμελητέο σε σύγκριση με το ρεύμα αγωγιμότητας στις χαμηλές συχνότητες (σελίδα 160 του βιβλίου). Συνεπώς ήταν αδύνατον να παρατηρηθεί και κατ' επέκταση να μετρηθεί.

2. Δύο ομοαξονικά "απείρου μήκους" σωληνοειδή πηνία έχουν το ίδιο μήκος ℓ, γραμμική πυκνότητα σπειρών n_1 και n_2 αντίστοιχα, διατομή σπειρών S_1 και S_2 ($S_1 > S_2$)και διαρέονται από ρεύματα σταθερής έντασης I_1 και I_2. Τη χρονική στιγμή t=0 τα σωληνοειδή είναι τοποθετημένα έτσι ώστε τμήμα μήκους x_o του μικρότερου ως προς τη διατομή πηνίου να βρίσκεται μέσα στο άλλο. Με δεδομένο ότι τα μαγνητικά πεδία που παράγονται είναι αντιπαράλληλα να υπολογιστούν τα εξής:
α) Η απωστική δύναμη που ασκείται μεταξύ των πηνίων.
β) Αν το μικρότερης διατομής σωληνοειδές έχει μάζα m_2 και είναι ελεύθερο να κινηθεί, να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται για να εξέλθει από το χώρο του άλλου σωληνοειδούς.
γ) Να υπολογιστεί η ενέργεια που προσέφεραν στο σύστημα οι πηγές, με τις οποίες είναι συνδεδεμένα τα σωληνοειδή, στο χρονικό διάστημα από t=0 ώσπου το μικρότερο να εξέλθει τελείως από το χώρο του μεγαλύτερου.

α) Τα δύο πηνία δημιουργούν, ανεξάρτητα, στο εσωτερικό τους ομογενή μαγνητικά πεδία $B_1 = \mu_o n_1 I_1$ και $B_2 = \mu_o n_2 I_2$, τα οποία σύμφωνα με τα δεδομένα είναι αντιπαράλληλα. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα των δύο πηνίων όταν γενικά τμήμα x του μικρότερου βρίσκεται στο εσωτερικό του μεγαλύτερου είναι:

$$U = \frac{1}{2\mu_o}[B_1^2 S_1(\ell - x) + B_2^2 S_2(\ell - x) + B_1^2(S_1 - S_2)x + (B_1 - B_2)^2 S_2 x] = \frac{1}{2\mu_o}[B_1^2 S_1 \ell + B_2^2 S_2 \ell - 2B_1 B_2 S_2 x]$$

Η δύναμη που ασκείται μεταξύ των δύο πηνίων προκύπτει από τη σχέση

$$\vec{F}_m = -\nabla U = -\frac{dU}{dx}\vec{x}_o = -\frac{1}{2\mu_o}[-B_1^2 S_1 - B_2^2 S_2 + B_1^2(S_1 - S_2) + (B_1 - B_2)^2 S_2]\vec{x}_o \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{B_1 B_2 S_2}{\mu_o} = \mu_o n_1 n_2 I_1 I_2 S_2 \vec{x}_o$$

και είναι απωστική.

β) Το μικρό πηνίο με την επίδραση της παραπάνω δύναμης θα εκτελέσει επιταχυνόμενη κίνηση, με επιτάχυνση $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{F}_m|}{m_2}$. Το διάστημα που θα διανύσει ώσπου να εξέλθει τελείως από το άλλο σωληνοειδές θα είναι x_o. Εφόσον η κίνηση είναι επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, ισχύει $x_o = \frac{1}{2}|\bar{\alpha}|t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_o m_2}{\mu_o n_1 n_2 I_1 I_2 S_2}}$

γ) Η αρχική μαγνητική ενέργεια του συστήματος είναι $\frac{1}{2\mu_o}[B_1^2 S_1 \ell + B_2^2 S_2 \ell - 2B_1 B_2 S_2 x_o]$ και η τελική $\frac{1}{2\mu_o}[B_1^2 S_1 \ell + B_2^2 S_2 \ell]$. Άρα αυξήθηκε κατά $\Delta U_m = \frac{B_1 B_2 S_2 x_o}{2\mu_o}$. Εφόσον τα πηνία είναι συνδεδεμένα με πηγές, οι οποίες διατηρούν σταθερό το ρεύμα και το μαγνητικό πεδίο, η μηχανική ενέργεια που δαπανήθηκε για τη μετακίνηση του μικρού σωληνοειδούς, αντλήθηκε από τις πηγές και είναι κατά μέτρο ίση με τη μεταβολή της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου. Άρα η συνολική ενέργεια που προσέφεραν οι πηγές στο σύστημα είναι $\Delta U_{O\Lambda} = 2\Delta U_m = \frac{B_1 B_2 S_2 x_o}{\mu_o}$

3. Πηνίο μήκους L αποτελείται από N τετραγωνικές σπείρες πλευράς α και στο χώρο (μ_o,ε_o) ,εσωτερικά του πηνίου, υπάρχει μαγνητικό πεδίο έντασης $\bar{H} = \hat{z} H_0 \cos(\beta z - \omega t)\sin(\beta x - \omega t)$. Αν ο άξονας του πηνίου είναι παράλληλος προς τη διεύθυνση $\hat{z}$, να υπολογιστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στα άκρα του όταν είναι ανοικτά. Να θεωρηθεί σαν δεδομένο ότι L>>α, ότι οι σπείρες εφάπτονται μεταξύ τους και ο αγωγός με τον οποίο είναι κατασκευασμένο το πηνίο καλύπτεται από μονωτικό υλικό.

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από μια σπείρα του πηνίου είναι

$\Phi_\sigma = \oiint_{S_\sigma} \mu_o \bar{H} \cdot d\bar{S} = \int_0^\alpha \int_0^\alpha \mu_o H_o \cos(\beta z - \omega t)\sin(\beta x - \omega t)\hat{z} \cdot \hat{z} dxdy$. *Το πλήθος των σπειρών ανά μονάδα μήκους είναι* $n = N/L$ *και σε στοιχειώδες μήκος dz υπάρχουν dN=ndz σπείρες. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μήκος dz είναι πολύ μικρό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι από όλες τις σπείρες που υπάρχουν στο διάστημα αυτό περνά η ίδια ροή (θεωρούμε ουσιαστικά ότι η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου είναι απειροστή). Άρα από τις dN σπείρες περνά ροή* $d\Phi = \Phi_\sigma ndz$ *και η ροή που διέρχεται από όλο το πηνίο είναι*

$$\Phi_O = \int_0^L \Phi_\sigma ndz = n\mu_o \int_0^L \left[\int_0^\alpha \int_0^\alpha H_o \cos(\beta z - \omega t)\sin(\beta x - \omega t)dxdy \right] dz =$$

$$= n\mu_o H_o \int_0^\alpha dy \int_0^\alpha \sin(\beta x - \omega t)dx \int_0^L \cos(\beta z - \omega t)dz = ... =$$

$$= n\mu_o H_o \frac{4\alpha}{-\beta^2}[\sin(\frac{\beta\alpha}{2})\cos(\frac{\beta L}{2})\sin(\omega t - \frac{\beta\alpha}{2})\sin(\frac{\beta L}{2} - \omega t)]$$

4. **Σε ομογενές και ισότροπο μέσο $(\varepsilon, \mu, \rho = 0, \sigma = 0)$ υπάρχει ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\overline{E}(x,y) = [\hat{x}C_1(x+y) + \hat{y}C_2(2x-y)]e^{j\omega t}$ όπου C_1, C_2 άγνωστες σταθερές(πραγματικοί αριθμοί). Αν η πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου είναι 10^{-13}Joule/m^3 και η συχνότητα f=1GHz να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση x=2, y=0.**

Εφόσον στο χώρο δεν υπάρχουν φορτία για το ηλεκτρικό πεδίο ισχύει:

$$\nabla \cdot \overline{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = C$$

Το μαγνητικό πεδίο είναι

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = -j\omega \overline{B} \Rightarrow \overline{B} = \frac{j}{\omega} \overline{\nabla} \times \overline{E} = \hat{z}\frac{j}{\omega} Ce^{j\omega t} \Rightarrow \overline{H} = \hat{z}\frac{jC}{\omega\mu} Ce^{j\omega t}$$

Η σταθερά C, με δεδομένη την πυκνότητα του μαγνητικού πεδίου, υπολογίζεται:

$$u_m = \frac{1}{2}\mu |H|^2 = \frac{1}{2}\mu \frac{C^2}{\mu^2\omega^2} \Rightarrow C = \omega\sqrt{2\mu u_m} = 3.15$$

Άρα $|E| = \sqrt{C^2(x+y)^2 + C^2(2x-y)^2} = 14V/m \quad E_{rms} = 9.9V/m.$

5. **Δύο παράλληλοι μεταλλικοί δίσκοι βρίσκονται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο τοποθετημένοι κάθετα στη διεύθυνση του. Να ερμηνεύσετε το φαινόμενο της αμοιβαίας έλξης των δίσκων όταν η ένταση του πεδίου μεταβάλλεται χρονικά.**

Λόγω της χρονικής μεταβολής του μαγνητικού πεδίου αναπτύσσονται δινορεύματα στους μεταλλικούς δίσκους (νόμος του Faraday). Τα ρεύματα αυτά είναι ομόρροπα με αποτέλεσμα να έλκονται οι δίσκοι (δυνάμεις Laplace).

6. **Να δείξετε ότι, η μέση τιμή του διανύσματος Poynting ενός ελλειπτικά πολωμένου ηλεκτρομαγνητικού κύματος, που διαδίδεται στο κενό, ισούται με το άθροισμα των μέσων τιμών των διανυσμάτων Poynting των δύο επιμέρους γραμμικά πολωμένων κυμάτων που το συνθέτουν.**

Έστω ότι πεδία του ηλεκτρομαγνητικού κύματος περιγράφονται από τις εξισώσεις $\vec{E} = E_o \sin(\omega t - kx)\vec{y}_o$ *και* $\vec{B} = B_o \sin(\omega t - kx)\vec{z}_o$, *όπου* $\omega = 2\pi c/\lambda$, $k = 2\pi/\lambda$ *και* $E_o = cB_o$.

α) Θεωρώντας ότι ο αγωγός βρίσκεται στη θέση $x = 0$, *η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται σε αυτόν είναι* $\varepsilon_\alpha = \int_0^\ell E_o \sin(\omega t)\vec{y}_o \cdot dy\vec{y}_o = E_o \ell \sin(\omega t)$.

β) Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο αγώγιμο τετραγωνικό πλαίσιο υπολογίζεται από τη σχέση $\varepsilon_\beta = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_0^\ell\int_0^\ell B_o \sin(\omega t - kx)\vec{z}_o \cdot dxdy\vec{z}_o = E_o\ell[\sin(\omega t - k\ell) - \sin(\omega t)]$. *Επειδή* $\ell << \lambda$ *τότε* $\varepsilon_\beta = E_o\ell[\sin(\omega t)\cos(k\ell) - \cos(\omega t)\sin(k\ell) - \sin(\omega t)] \cong E_o\ell\frac{2\pi\ell}{\lambda}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

Συνεπώς η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι κατά πολύ μικρότερη αυτής που αναπτύσσεται στον ευθύγραμμο αγωγό και προηγείται κατά 90°.

7. Να προσδιοριστεί το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που αντιστοιχεί στα δυναμικά $V_1(r,t) = 0$, $\bar{A}_1(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r}$. Αν το διανυσματικό δυναμικό μεταβληθεί και περιγράφεται από τη συνάρτηση $\bar{A}_2(r,t) = 2(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2})\hat{r}$, ποια θα πρέπει να είναι η νέα συνάρτηση $V_2(r,t)$ ώστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο να παραμείνουν αμετάβλητα.

Η ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι αρχικά: $\bar{E} = -\bar{\nabla}V_1 - \frac{\partial\bar{A}_1}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$ $\bar{H} = \bar{\nabla}\times\bar{A}_1 = 0$. *Ας ορίσουμε σαν συνάρτηση* $\bar{p}(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r}$ *τον όρο που προστέθηκε στο διανυσματικό δυναμικό. Η* $\bar{p}(r,t)$ *αποτελεί την κλήση μιας άλλης βαθμωτής συνάρτησης g(r,t) η οποία υπολογίζεται:* $\bar{\nabla}g = \bar{p} \Rightarrow g = \int\bar{p}\cdot d\bar{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qt\int\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot d\bar{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r} + C$. *Η νέα τιμή του μαγνητικού πεδίου είναι :* $\bar{H} = \bar{\nabla}\times\bar{A}_1 + \bar{\nabla}\times\bar{\nabla}g = 0$ *(επειδή η στροφή της κλίσης βαθμωτής συνάρτησης είναι μηδενική). Άρα το μαγνητικό πεδίο μένει αμετάβλητο. Για να παραμείνει αμετάβλητο και το ηλεκτρικό πεδίο αρκεί το νέο δυναμικό να είναι* $V_2 = -\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$.

8. Δύο σωληνοειδή μεγάλου μήκους είναι τοποθετημένα το ένα μέσα στο άλλο και ο κοινός τους άξονας είναι κάθετος στο οριζόντιο επίπεδο . Τα σωληνοειδή είναι τοποθετημένα σε χώρο (ε_0, μ_0) , έχουν ακτίνες R_1 και R_2 ($R_1 < R_2$), πυκνότητα σπειρών n_1 και n_2 και διαρρέονται από ρεύμα $I_1(t) = I_{01}\sin(\omega t)$ και $I_2(t) = I_{02}\sin(\omega t)$ αντίστοιχα. Θεωρήστε φορτίο q το οποίο κρατείται αρχικά ακίνητο σε απόσταση r_0 από τον άξονα των σωληνοειδών($r_0 < R_1$) . α)Ποια θα πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των ρευμάτων ώστε αν το φορτίο πάψει να συγκρατείται, να εκτελέσει ελεύθερη πτώση. β)Ποια θα πρέπει να είναι η αντίστοιχη σχέση μεταξύ των ρευμάτων αν $R_1 < r_0 < R_2$.

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ρεύμα του κάθε σωληνοειδούς είναι $\bar{B}_1 = \hat{z}\mu_0 n_1 I_{01}\sin(\omega t)$ *και* $\bar{B}_2 = \hat{z}\mu_0 n_2 I_{02}\sin(\omega t)$ *(μπορούμε να υποθέσουμε αρχικά ότι τα ρεύματα άρα και τα πεδία έχουν την* *ίδια φορά. Το αποτέλεσμα θα δείξει αν η υπόθεση είναι σωστή ή ισχύει το αντίθετο). Στο χώρο εσωτερικά του σωληνοειδούς με τη μικρότερη ακτίνα, το μαγνητικό πεδίο είναι* $\mathbf{\bar{B}_I = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 = \hat{z}\mu_0 \sin(\omega t)(n_1 I_{01} + n_2 I_{02}) = \hat{z}B_{Iz}}$. *Στον ίδιο χώρο η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση* $\mathbf{r_0}$ *από τον άξονα θα είναι* $\mathbf{E_\phi = -\frac{r_0}{2}\frac{\partial B_{IZ}}{\partial t}}$ *(*$\mathbf{\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = -\oiint_{S_C} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot d\bar{S} \Rightarrow}$ **............***). Αρχικά στο ακίνητο φορτίο ασκούνται δύο δυνάμεις . Η βαρύτητα και η ηλεκτρική δύναμη* $\mathbf{F_e = qE_\phi}$. *Όταν αφήσουμε το φορτίο ελεύθερο, για να κινηθεί μόνο με την επίδραση της βαρυτικής δύναμης αρκεί* $\mathbf{E_\phi}$ *=0 (εφόσον κατά την πτώση του θα κινείται παράλληλα προς τη διεύθυνση του* $\mathbf{\bar{B}_I}$ *και επομένως δεν μπορεί το μαγνητικό πεδίο να ασκήσει σ' αυτό δύναμη). Σύμφωνα με τα παραπάνω πρέπει* $\mathbf{\frac{\partial B_{IZ}}{\partial t} = 0 \Rightarrow n_1 I_{01} + n_2 I_{02} = 0 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = -\frac{I_{02}}{I_{01}}}$. *Αυτή είναι η σχέση που συνδέει τα μεγέθη των ρευμάτων και όπως είναι προφανές οι φορές τους θα πρέπει τελικά να είναι αντίθετες.*

Όταν η θέση του φορτίου είναι ανάμεσα στα δύο σωληνοειδή ($\mathbf{R_1 < r_0 < R_2}$*), το εσωτερικό σωληνοειδές δεν δημιουργεί μεν μαγνητικό πεδίο στο χώρο αυτό , επάγει όμως ηλεκτρικό πεδίο:* $\mathbf{E_{\phi 1} = -\frac{R_1^2}{2r_0}\frac{\partial B_{1Z}}{\partial t}}$. *Στον ίδιο χώρο υπάρχει και ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται στο εξωτερικό σωληνοειδές:* $\mathbf{E_{\phi 2} = -\frac{r_0}{2}\frac{\partial B_{2Z}}{\partial t}}$. *Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι* $\mathbf{E_{\phi\Pi}} = \mathrm{E_{\phi 1} + E_{\phi 2}} = \mathbf{-\frac{R_1^2}{2r_0}\frac{\partial B_{1Z}}{\partial t} - \frac{r_0}{2}\frac{\partial B_{2Z}}{\partial t}}$. *Για να είναι* $\mathbf{E_{\phi\Pi} = 0}$*, πρέπει*

$$\mathbf{-\frac{R_1^2}{2r_0}\frac{\partial B_{1Z}}{\partial t} = \frac{r_0}{2}\frac{\partial B_{2Z}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{R_1^2}{2r_0}\mu_0 n_1 I_{01}\omega\cos(\omega t) = \frac{r_0}{2}\mu_0 n_2 I_{02}\omega\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{R_1^2}{r_0^2}\frac{n_1}{n_2} = -\frac{I_{02}}{I_{01}}}$$

. Αυτή είναι η σχέση που συνδέει τα μεγέθη των ρευμάτων και οι φορές τους, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, θα πρέπει να είναι αντίθετες