ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ

2005

1. Ένας ευθύγραμμος αγωγός, απείρου θεωρητικά μήκους, παρουσιάζει ανά μονάδα μήκους ωμική αντίσταση ρ και διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης I. Να αποδείξετε ότι η ηλεκτρομαγνητική ισχύς που εισέρχεται στον αγωγό είναι ίση με τις απώλειες Joule.

Από το νόμο του Ampere προκύπτει ότι ο ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, η ένταση του οποίου στην παράπλευρη επιφάνεια του αγωγού δίνεται από τη σχέση $\vec{H} = \dfrac{I}{2\pi r}\vec{e}_\phi$, *όπου* r *η ακτίνα του αγωγού. Ταυτόχρονα μέσα στον αγωγό επιδρά ηλεκτρικό πεδίο έντασης* $\vec{E} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e}_z = I\rho\vec{e}_z$. *Το διάνυσμα Poynting στην επιφάνεια του αγωγού* $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = -\dfrac{\rho I^2}{2\pi r}\vec{e}_r$, *όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια εισέρχεται στον αγωγό. Έτσι ανά μονάδα μήκους του αγωγού εισέρχεται ηλεκτρομαγνητική ισχύς* $\dfrac{dP}{dz} = \left|\vec{S}\cdot 2\pi r\vec{e}_r\right| = \rho I^2$, *που είναι ίση με τις απώλειες Joule ανά μονάδα μήκους του αγωγού.*

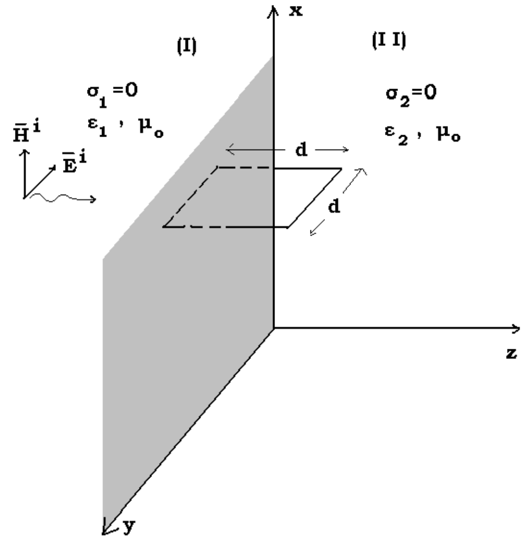
2. Όταν ένα ισοταχώς κινούμενο φορτίο βρεθεί μέσα σε ένα χρονικά σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Εάν όμως λάβει κανείς υπόψη του ότι η κυκλική κίνηση είναι επιταχυνόμενη κίνηση τότε το φορτίο ακτινοβολεί ηλεκτρομαγνητική ενέργεια. Να βρείτε τη σχέση που περιγράφει χρονικά τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του φορτίου και θεωρώντας ότι η γωνιακή ταχύτητα του φορτίου παραμένει σταθερή να περιγράψετε ποιοτικά την τροχιά του.

Το φορτίο ακτινοβολεί ηλεκτρομαγνητική ισχύ $P = \dfrac{q^2}{6\pi\varepsilon_o c^3}a^2$ *(σελίδα 237 του βιβλίου), όπου* a *είναι το μέτρο της επιτάχυνσης. Η απώλεια ενέργειας του σωματιδίου λόγω της ακτινοβολίας φέρει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της κινητικής του ενέργειας. Έτσι προκύπτει η σχέση* $\dfrac{dT}{dt} = -P \Rightarrow m\upsilon\dfrac{d\upsilon}{dt} = -\dfrac{q^2}{6\pi\varepsilon_o c^3}\left(\dfrac{d\upsilon}{dt}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{d\upsilon}{dt} + \dfrac{6\pi\varepsilon_o c^3 m}{q^2}\upsilon = 0$. *Λύνοντας την τελευταία διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι το μέτρο της ταχύτητας του φορτίου* $\upsilon = \upsilon_o e^{-t/\tau}$, *όπου* υ_o *η αρχική του ταχύτητα και* $\tau = \dfrac{q^2}{6\pi\varepsilon_o c^3 m}$. *Εφόσον ελαττώνεται η επιτρόχιος ταχύτητα του φορτίου, ενώ η γωνιακή του ταχύτητα παραμένει σταθερή, τότε η ακτίνα της τροχιάς του θα ελαττώνεται διαρκώς με αποτέλεσμα το φορτίο να εκτελεί σπειροειδή κίνηση έως ότου σταματήσει.*

3. Τετραγωνικός αγώγιμος βρόχος πλευράς d είναι τοποθετημένος κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια δύο χώρων. Στο χώρο (Ι) υπάρχει διηλεκτρικό υλικό με σταθερές ε_1, μ_o, ενώ στο χώρο (ΙΙ) το υλικό έχει σταθερές ε_2, μ_o, όπου $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Η διαχωριστική επιφάνεια βρίσκεται στο επίπεδο xy και ο βρόχος, που είναι παράλληλος προς το επίπεδο yz, βρίσκεται κατά το ήμισυ στον χώρο (Ι) και κατά το ήμισυ στον χώρο (ΙΙ). Επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα

$$\overline{\mathbf{E}}_i = -\mathbf{E}_o e^{i(\omega t-\beta_1 z)}\hat{\mathbf{y}}_o \qquad \overline{\mathbf{H}}_i = \mathbf{H}_o e^{i(\omega t-\beta_1 z)}\hat{\mathbf{x}}_o$$

διαδιδόμενο στο χώρο (Ι) προσπίπτει κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια. Να υπολογιστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στον αγωγό.



Στον χώρο (Ι) υπάρχει το προσπίπτον ($\bar{E}^i$, $\bar{H}^i$*) και το ανακλώμενο (*$\bar{E}^r$, $\bar{H}^r$*)στη διαχωριστική επιφάνεια ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ενώ στο χώρο (ΙΙ) υπάρχει το διερχόμενο(*$\bar{E}^t$, $\bar{H}^t$*). Η ηλεκτρεγερτική δύναμη στο πλαίσιο θα αναπτύσσεται λόγω της χρονικά μεταβαλλόμενης μαγνητική ροής που διέρχεται από την επιφάνειά του. Τα πεδία που αναπτύσσονται στους δύο χώρους είναι:*

$$\bar{E}^i = -\hat{y}E_o e^{-i\beta_1 z}e^{i\omega t} \quad , \quad \bar{H}^i = \hat{x}H_o e^{-i\beta_1 z}e^{i\omega t} = \hat{x}\frac{E_o}{\eta_1}e^{-i\beta_1 z}e^{i\omega t} \quad , \bar{E}^r = -\hat{y}E_o R e^{i\beta_1 z}e^{i\omega t} \quad , \quad \bar{H}^r = -\hat{x}\frac{E_o R}{\eta_1}e^{i\beta_1 z}e^{i\omega t}$$

$$\bar{E}^t = -\hat{y}E_o T e^{-i\beta_2 z}e^{i\omega t} \quad , \quad \bar{H}^t = \hat{x}\frac{E_o T}{\eta_2}e^{-i\beta_2 z}e^{i\omega t}$$

όπου $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_1}}$, $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_2}}$, $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_o \varepsilon_1}$, $\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_o \varepsilon_2}$ *και* $R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ *είναι ο συντελεστής ανάκλασης ενώ* $T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$ *είναι ο συντελεστής διέλευσης. Στον χώρο (Ι) το συνολικό μαγνητικό πεδίο είναι* $\bar{H}^1 = \bar{H}^i + \bar{H}^r$. *Η μαγνητική ροή που διέρχεται από το μισό της επιφάνειας του βρόχου(*$S_1 = S/2$*) οφείλεται στο* $\bar{H}^1$ *ενώ εκείνη που διέρχεται από το υπόλοιπο μισό οφείλεται στο* $\bar{H}^t$. *Θεωρώντας φορά ρεύματος τέτοια ώστε το* $\hat{S}$ *να έχει την ίδια φορά με τον άξονα* $\hat{x}$ *η συνολική ροή είναι*

$$\Phi = \oiint_S \bar{B}\cdot d\bar{S} = \iint_{S_1} \mu_o \bar{H}^1 \cdot d\bar{S} + \iint_{S_2} \mu_o \bar{H}^t \cdot d\bar{S} =$$

$$= \mu_o E_o e^{i\omega t}\Big[\frac{1}{\eta_1}\int_0^d dy \int_{-d/2}^{0} (e^{-i\beta_1 z})\hat{x}\cdot\hat{x}dz + \frac{1}{\eta_1}\int_0^d dy \int_{-d/2}^{0} e^{i\beta_1 z}R(-\hat{x})\cdot\hat{x}dz + \frac{1}{\eta_2}\int_0^d dy \int_0^{d/2} (e^{-i\beta_2 z}T)\hat{x}\cdot\hat{x}dz\Big] = \ldots$$

$$= \mu_o E_o e^{i\omega t} d\Big[\frac{1}{i\beta_1\eta_1}(e^{i\beta_1 d/2} - 1 - R + Re^{-i\beta_1 d/2}) - \frac{1}{i\beta_2\eta_2}(e^{-i\beta_2 d/2} - 1)T\Big]$$

Η ΗΕΔ υπολογίζεται

$$\text{ΗΕΔ} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i\omega\mu_o E_o e^{i\omega t} d\Big[\frac{1}{i\omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_1}\sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_1}}}(e^{i\beta_1 d/2} - 1 - R + Re^{-i\beta_1 d/2}) - \frac{1}{i\omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_2}\sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_2}}}(e^{-i\beta_2 d/2} - 1)T\Big] =$$

$$= E_o e^{i\omega t} d\Big[-e^{i\beta_1 d/2} + 1 + R - Re^{-i\beta_1 d/2} + Te^{-i\beta_2 d/2} - T\Big]$$

Επειδή R+1=T τελικά $\mathrm{HE\Delta} = E_o e^{i\omega t} d\left[-e^{i\beta_1 d/2} - Re^{-i\beta_1 d/2} + Te^{-i\beta_2 d/2}\right]$

4. Στο εσωτερικό ορθογωνικής κοιλότητας με διαστάσεις a x b x c και μεταλλικά τοιχώματα είναι δυνατόν, για ορισμένες τιμές συχνότητας, να αναπτυχθεί ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

$$\vec{E} = E_o \cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\sin(\frac{l\pi z}{c})e^{i\omega t}\vec{x}_o,\ \vec{H} = H_o \cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\cos(\frac{l\pi z}{c})e^{i\omega t}\vec{y}_o$$

όπου m,n,l ακέραιοι αριθμοί που μπορεί να λάβουν τιμές ο $m = 0,1,2,3,...$ και οι $n,l = 1,2,3,...$. Το εσωτερικό της κοιλότητας είναι πλήρες με διηλεκτρικό υλικό που έχει ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε και μαγνητική διαπερατότητα μ. Να προσδιοριστούν οι τιμές που επιτρέπεται να λάβει η κυκλική συχνότητα ω.

Οι συναρτήσεις του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου που δίνονται πρέπει να αποτελούν λύσεις των αντίστοιχων κυματικών εξισώσεων $\nabla^2\overline{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2} = 0,\quad \nabla^2\overline{H} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial t^2} = 0$

Όσον αφορά στο ηλεκτρικό πεδίο (το ίδιο ισχύει και για το μαγνητικό) πρέπει

$$\nabla^2 E_x - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 E_x - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2\mu\varepsilon E_x = 0 \Rightarrow$$

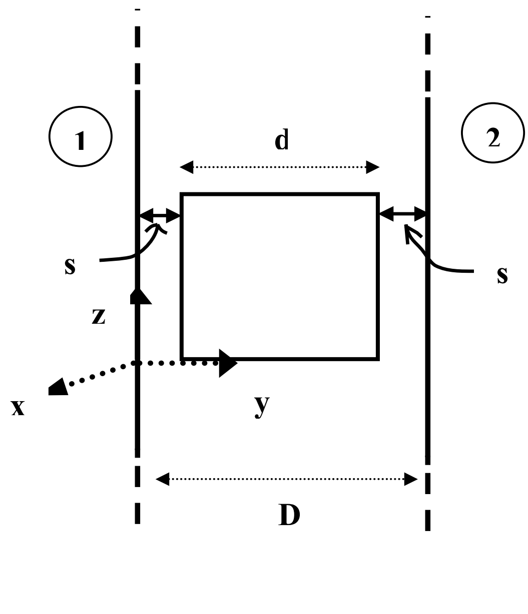
$$\Rightarrow E_o\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\sin(\frac{\ell\pi y}{c})e^{i\omega t}[-(\frac{m\pi}{a})^2 - (\frac{n\pi}{b})^2 - (\frac{\ell\pi}{c})^2 + \omega^2\mu\varepsilon] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{\ell\pi}{c})^2 = \omega^2\sqrt{\mu\varepsilon} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}[\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{\ell\pi}{c})^2}\,]$$

και επομένως οι επιτρεπτές τιμές συχνότητας είναι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}[\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{\ell\pi}{c})^2}\,]$$

5. Δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι αγωγοί απεριορίστου μήκους, που απέχουν απόσταση D, διαρρέονται από ρεύματα της ίδιας έντασης $I = I_o\cos\omega t$ αλλά αντίθετης φοράς. Τετραγωνικός συρμάτινος βρόχος, πλευράς d, τοποθετείται ανάμεσα στους δύο αγωγούς στο επίπεδο που ορίζουν. Να υπολογιστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο βρόχο και ο συντελεστής της αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ του βρόχου και του συστήματος των δύο αγωγών



Έστω ότι το ρεύμα στον πρώτο αγωγό είναι $\bar{\mathbf{I}}_1 = \hat{\mathbf{z}}\mathbf{I}_o \cos\omega t$ *και στον δεύτερο* $\bar{\mathbf{I}}_2 = -\hat{\mathbf{z}}\mathbf{I}_o \cos\omega t$. *Η μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί το καθένα σε τυχόν σημείο της επιφάνειας του βρόχου είναι* $\bar{\mathbf{B}}_1 = (-\hat{x})\frac{\mu_o I_o \cos(\omega t)}{2\pi y}$, $\bar{\mathbf{B}}_2 = (-\hat{x})\frac{\mu_o I_o \cos(\omega t)}{2\pi(D-y)}$.

Αν θεωρήσουμε ότι το ρεύμα που αναπτύσσεται στο βρόχο είναι αριστερόστροφο , η μαγνητική ροή που δημιουργούν τα $\bar{\mathbf{B}}_1$ *και* $\bar{\mathbf{B}}_2$ *είναι:*

$$\Phi_1 = \int_0^d\int_s^{s+d} \bar{\mathbf{B}}_1 \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_0^d\int_s^{s+d} \bar{\mathbf{B}}_1 \cdot (\hat{x})dydz = -\frac{\mu_o}{2\pi} I_o \cos(\omega t)\int_0^d dz \int_s^{s+d} \frac{1}{y}dy = -\frac{\mu_o d}{2\pi} I_o \cos(\omega t)\ln(\frac{s+d}{s})$$

$$\Phi_2 = \int_0^d\int_s^{s+d} \bar{\mathbf{B}}_2 \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_0^d\int_s^{s+d} \bar{\mathbf{B}}_2 \cdot (\hat{x})dydz = -\frac{\mu_o}{2\pi} I_o \cos(\omega t)\int_0^d dz \int_s^{s+d} \frac{1}{D-y}dy = \frac{\mu_o d}{2\pi} I_o \cos(\omega t)\ln(\frac{D-s-d}{D-s})$$

Η συνολική ροή που διέρχεται από το βρόχο είναι

$$\Phi_o = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_o d}{2\pi}[-\ln(\frac{s+d}{s}) + \ln(\frac{D-s-d}{D-s})]I_o \cos(\omega t) = \frac{\mu_o d}{2\pi}[\ln(\frac{s^2}{(D-s)^2})]I_o \cos(\omega t)\cdot$$

Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής σύμφωνα με το αποτέλεσμα που βρέθηκε είναι $\mathbf{M} = \frac{\mu_o d}{\pi}[\ln\frac{s}{(D-s)}]$. *Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται υπολογίζεται:*

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_o d}{\pi} I_o \omega \sin(\omega t)[\ln(\frac{s}{D-s})]$$

6. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι $\bar{\mathbf{E}} = (8\hat{\mathbf{x}}_o - 6\hat{\mathbf{y}}_o)e^{i(\omega t - 3x - 4y)}$ **V/m.**

α) Να προσδιοριστούν η διεύθυνση διάδοσης, η συχνότητά και το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου.

β) Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου και να επιβεβαιωθεί ότι το κύμα είναι επίπεδο.

Η φάση του $\bar{\mathbf{E}}$ *είναι* $\phi = \omega t - 3x - 4y$ **[1]**. *Σύμφωνα με τη θεωρία* $\phi = \omega t - \bar{\mathbf{k}}\cdot\bar{\mathbf{r}}$ *(όπου* $\bar{\mathbf{k}}$ *το διάνυσμα του κυματάριθμου) , άρα* $\bar{\mathbf{k}}\cdot\bar{\mathbf{r}} = 3x + 4y$ **[2]**. *Αν* $\bar{\mathbf{k}} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$ *και* $\bar{\mathbf{r}} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ *από τη σχέση [2] συνεπάγεται ότι* $\bar{\mathbf{k}}\cdot\bar{\mathbf{r}} = k_x x + k_y y + k_z z$ **[3]**. *Συγκρίνοντας τις [2] και [3] προκύπτει ότι* $k_x = 3$, $k_y = 4$, $k_z = 0$. *Το μέτρο του* $\bar{\mathbf{k}}$ *είναι* $|\bar{\mathbf{k}}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = 5$ *και δεδομένου ότι* $|\bar{\mathbf{k}}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ *, η συχνότητα του κύματος υπολογίζεται ότι είναι* $2.38\cdot10^8$ *Hz. Η διεύθυνση διάδοσης του κύματος είναι* $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\bar{\mathbf{k}}}{|\bar{\mathbf{k}}|} = 0.6\hat{x} + 0.8\hat{y}$. *Η μαγνητική επαγωγή υπολογίζεται από την εξίσωση του Maxwell* $\bar{\mathbf{B}} = \frac{j}{\omega}\nabla\times\bar{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{z}}\frac{j}{\omega}50e^{j(\omega t - 3x - 4y)}$.

Η διεύθυνση του $\bar{\mathbf{E}}$ *είναι :* $\hat{\mathbf{E}} = \frac{\bar{\mathbf{E}}}{|\bar{\mathbf{E}}|} = 0.8\hat{x} - 0.6\hat{x}$ *Σύμφωνα με την μαθηματική περιγραφή των* $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ *και* $\hat{\mathbf{k}}$ *εύκολα αποδεικνύεται ότι* $\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$, $\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$, $\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{B}} = 0$ *και επομένως το κύμα είναι επίπεδο.*

7. Να δείξετε ότι, η μέση τιμή του διανύσματος Poynting ενός ελλειπτικά πολωμένου ηλεκτρομαγνητικού κύματος, που διαδίδεται στο κενό, ισούται με το άθροισμα των μέσων τιμών των διανυσμάτων Poynting των δύο επιμέρους γραμμικά πολωμένων κυμάτων που το συνθέτουν.

Έστω ότι η διεύθυνση διάδοσης του κύματος συμπίπτει με αυτή του άξονα $\vec{x}$. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι:

$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E_1 e^{i(\omega t - bx)} \hat{y}_o + E_2 e^{i(\omega t - bx + \phi)} \hat{z}_o}$ και $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{-H_2 e^{i(\omega t - bx + \varphi)} \hat{y}_o + H_1 e^{i(\omega t - bx)} \hat{z}_o}$,

όπου $H_1 = \dfrac{E_1}{R}$ και $H_2 = \dfrac{E_2}{R}$.

$$\langle \bar{\mathbf{S}} \rangle = \frac{1}{2}\mathbf{Re}[\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^*] = \frac{1}{2}\mathbf{Re}\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{x}}_o & \vec{\mathbf{y}}_o & \vec{\mathbf{z}}_o \\ 0 & \mathbf{E_1 e^{i(\omega t - bx)}} & \mathbf{E_2 e^{i(\omega t - bx + \phi)}} \\ 0 & -\dfrac{\mathbf{E_2}}{\mathbf{R}}\mathbf{e^{-i(\omega t - bx + \phi)}} & \dfrac{\mathbf{E_1}}{\mathbf{R}}\mathbf{e^{-i(\omega t - bx)}} \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{E_1^2}}{\mathbf{2R}}\hat{\mathbf{x}}_o + \frac{\mathbf{E_2^2}}{\mathbf{2R}}\hat{\mathbf{x}}_o = \langle \bar{\mathbf{S}}_1 \rangle + \langle \bar{\mathbf{S}}_2 \rangle$$

8. Ένα ηλεκτρόνιο εκτελεί ταλάντωση κατά την οποία το διάνυσμα της θέσης του περιγράφεται από τη σχέση $\bar{\mathbf{r}}_e = \mathbf{x_e(1-\cos\omega t)\bar{x}_o}$. Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και την μαγνητική επαγωγή στη θέση $\bar{\mathbf{r}}_p = \mathbf{x_p \hat{x}_o}$ όπου $x_p >> x_e$.

Χρησιμοποιώντας σχέσεις που βρίσκονται στις σελ. 233 & 234 του βιβλίου:

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{r}}_p - \bar{\mathbf{r}}_e = \mathbf{x_p - x_e(1-\cos\omega t') \cong x_p}, \quad \bar{\beta} = \frac{\bar{\upsilon}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{x_e \omega}}{\mathbf{c}}\mathbf{\sin\omega t' \hat{x}_o}, \quad \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{x_e \omega^2 \cos\omega t' \hat{x}_o},$$

όπου $t' = t - \dfrac{R}{c} = t - \dfrac{x_p}{c}$

$\mathbf{s = R - \bar{\beta}\cdot\bar{R} = x_p(1-\beta)}$, $\mathbf{\bar{R} - R\bar{\beta} = x_p(1-\beta)\hat{x}_o = s\hat{x}_o}$, $\mathbf{\bar{\beta}\times\bar{R} = 0}$ και $\mathbf{\bar{a}\times\bar{R} = 0}$

$$\bar{\mathbf{E}}_\upsilon = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o s^3}}\mathbf{(\bar{R} - R\bar{\beta})(1-\beta^2)} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o}}\frac{\mathbf{1-\beta^2}}{\mathbf{s^2}}\hat{\mathbf{x}}_o$$

$$\bar{\mathbf{E}}_a = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o c^2 s^2}}\left[\frac{\mathbf{(\bar{R}\cdot\bar{a})(\bar{R} - R\bar{\beta})}}{\mathbf{s}} - \mathbf{R\bar{a}}\right] = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o c^2 s^2}}\mathbf{(Ra\hat{x}_o - Ra\hat{x}_o) = 0}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_\upsilon = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o c s^3}}\mathbf{(\bar{\beta}\times\bar{R})(1-\beta^2) = 0}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_a = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o c^3 s^2}}\left[\frac{\mathbf{(\bar{R}\cdot\bar{a})(\bar{\beta}\times\bar{R})}}{\mathbf{s}} + \mathbf{(\bar{a}\times\bar{R})}\right] = \mathbf{0}$$

Άρα $$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}_\upsilon + \bar{\mathbf{E}}_a = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o x_p^2}}\frac{\mathbf{1-\beta^2}}{\mathbf{(1-\beta)^2}}\hat{\mathbf{x}}_o = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o x_p^2}}\frac{\mathbf{1+\beta}}{\mathbf{1-\beta}}\hat{\mathbf{x}}_o = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o x_p^2}}\frac{\mathbf{1+\dfrac{x_e\omega}{c}\sin\omega(t-\dfrac{x_p}{c})}}{\mathbf{1-\dfrac{x_e\omega}{c}\sin\omega(t-\dfrac{x_p}{c})}}\hat{\mathbf{x}}_o$$

και $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_\upsilon + \bar{\mathbf{B}}_a = \mathbf{0}$