ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ 2004

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ

1. Πηνίο μήκους ℓ, διαμέτρου d και αριθμό σπειρών N κινείται με ταχύτητα υ και πλησιάζει ομοαξονικά ένα ακίνητο πηνίο μήκους 2ℓ, διαμέτρου $2d$ και αριθμό σπειρών $2N$. Το κινούμενο πηνίο διαρρέεται από συνεχές ρεύμα έντασης I, ενώ τα άκρα του ακίνητου πηνίου είναι ανοικτά. Θεωρώντας ότι $\ell >> d$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι το κινούμενο πηνίο πρόκειται να εισέλθει και να εξέλθει από το ακίνητο πηνίο, να υπολογίσετε την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο τελευταίο συναρτήσει του χρόνου.

Δεδομένου ότι $\ell >> d$ τα πηνία μπορούν να θεωρηθούν "απείρου" θεωρητικά μήκους. Συνεπώς μέσα στο κινούμενο πηνίο το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές και παράλληλο με το άξονα του πηνίου, ενώ το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής $B = \mu_o \frac{N}{\ell} I$. Έξω από το πηνίο $B = 0$. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κινούμενο πηνίο αρχίζει να εισέρχεται μέσα στο ακίνητο πηνίο. Εάν ορίσουμε το μήκος του κινούμενου πηνίου που βρίσκεται εντός του ακίνητου πηνίου ως x, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$t < 0$	$x = 0$
$0 \le t \le \ell / \upsilon$	$x = \upsilon t$
$\ell / \upsilon < t < 2\ell / \upsilon$	$x = \ell$
$2\ell / \upsilon \le t \le 3\ell / \upsilon$	$x = 3\ell - \upsilon t$
$t > 3\ell / \upsilon$	$x = 0$

Η ροή του μαγνητικού πεδίου που διέρχεται από μία σπείρα του ακίνητου πηνίου είναι ίση με BS, όπου $S = \pi d^2 / 4$ είναι η διατομή του κινούμενου πηνίου.

Η συνολική μαγνητική ροή στο ακίνητο πηνίο $\Phi = x \frac{2N}{2\ell} BS = \mu_o \frac{N^2 SI}{\ell^2} x$.

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο ακίνητο πηνίο είναι $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_o \frac{N^2 SI}{\ell^2} \frac{dx}{dt}$. Άρα όταν

$t < 0$	$\varepsilon = 0$
$0 \le t \le \ell / \upsilon$	$\varepsilon = -\mu_o N^2 SI\upsilon / \ell^2$
$\ell / \upsilon < t < 2\ell / \upsilon$	$\varepsilon = 0$
$2\ell / \upsilon \le t \le 3\ell / \upsilon$	$\varepsilon = \mu_o N^2 SI\upsilon / \ell^2$
$t > 3\ell / \upsilon$	$\varepsilon = 0$

<u>2.</u> Σημειακή πηγή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας εκπέμπει ισότροπα στον χώρο ισχύ P στη συχνότητα ω. Ένας παρατηρητής, κινούμενος με ταχύτητα υ, απομακρύνεται ακτινικά από την πηγή.

α) Να γράψετε τις μαθηματικές εκφράσεις που περιγράφουν την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στη θέση του παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς της πηγής.

β) Μεταφερόμενοι στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή να δείξετε ότι, εφόσον ο παρατηρητής γνωρίζει τα χαρακτηριστικά της ακίνητης πηγής, είναι δυνατόν να υπολογίσει την ταχύτητά του.

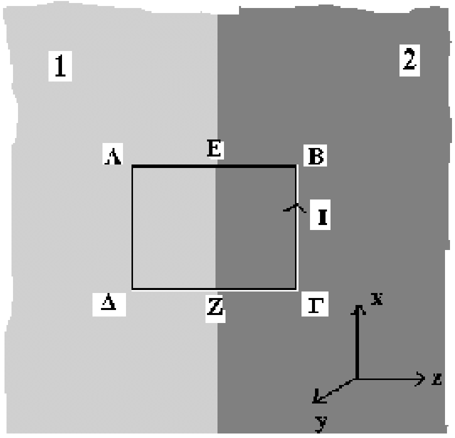
α) *Εφόσον η πηγή εκπέμπει ισότροπα τότε το διάνυσμα Poynting στη θέση του παρατηρητή* $S = \dfrac{P}{4\pi r^2}$, *όπου* $r = \upsilon t$ *είναι η απόσταση του παρατηρητή από την πηγή. Το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου προκύπτει από τις σχέσεις* $S = \dfrac{E_o^2}{2R} = \dfrac{R}{2} H_o^2$, *όπου* $R \cong 120\pi$ *είναι η ενδογενής αντίσταση του κενού. Η φάση του κύματος* $\varphi = \omega t - kr$ *στη θέση του παρατηρητή γίνεται* $\varphi = \omega t - k\upsilon t = \omega(1 - \dfrac{\upsilon}{c})t$.

Άρα $\vec{E}(r,t) = \dfrac{\sqrt{60P}}{\upsilon t}\cos[(1-\dfrac{\upsilon}{c})\omega t]$ *και* $\vec{H}(r,t) = \dfrac{\sqrt{P/60}}{2\pi\upsilon t}\cos[(1-\dfrac{\upsilon}{c})\omega t]$.

β) *Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής προκύπτει από τη σχέση* $\omega' = \gamma(\omega - k\upsilon)$ *και είναι ίση με* $\omega\sqrt{\dfrac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}}$. *Εφόσον ο παρατηρητής γνωρίζει τη συχνότητα* ω *τότε μπορεί από τη σχέση αυτή να υπολογίσει την ταχύτητά του.*

<u>3.</u> Τετράγωνος συρμάτινος βρόχος πλευράς α και ωμικής αντίστασης R βρίσκεται κατά το ήμισυ σε χώρο όπου υπάρχει υλικό με μαγνητική και ηλεκτρική διαπερατότητα μ_1 και ε_1 και κατά το ήμισυ σε χώρο με υλικό του οποίου οι σταθερές είναι μ_2 και ε_2 αντίστοιχα. Η επιφάνεια του βρόχου είναι κάθετη προς την επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια των δύο περιοχών και ο βρόχος κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{x}_o$ παράλληλα προς την επιφάνεια αυτή. Αν στις δύο περιοχές δημιουργηθεί εξωτερικά μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{H} = H_o\sin(\omega t)\vec{y}_o$ να βρεθεί η δύναμη που θα πρέπει να ασκείται σ' αυτόν ώστε η ταχύτητά

του να διατηρείται σταθερή και να εξακολουθήσει να κινείται ευρισκόμενος κατά το ήμισυ στις δύο περιοχές.



Το μαγνητικό πεδίο επάγει κατ' αρχήν ρεύμα στον αγωγό (η φορά του επιλέγεται αυθαίρετα όπως φαίνεται στο σχήμα) και κατόπιν ασκεί μαγνητική δύναμη στο ρεύμα αυτό. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο βρόχο είναι

$$E = \oint_{ΑΒΓΔ} (\overline{v} x \overline{B}) \cdot d\overline{l} - \oiint_{S} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot d\overline{S}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος του βρόχου προκύπτει ίσο με το μηδέν(κατά μήκος των πλευρών ΑΔ και ΒΓ είναι μηδέν ενώ τα αποτελέσματα κατά μήκος των πλευρών ΑΒ και ΓΔ προστιθέμενα αλγεβρικά δίνουν αποτέλεσμα επίσης μηδέν). Η ηλεκτρεγερτική δύναμη τελικά είναι:

$$E = -\oiint_{S} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot d\overline{S} = -\oiint_{S_{ΑΕΖΔ}} \frac{\partial \overline{B}_1}{\partial t} \cdot d\overline{S} - \oiint_{S_{ΕΒΓΖ}} \frac{\partial \overline{B}_2}{\partial t} \cdot d\overline{S} = -\oiint_{S_{ΑΕΖΔ}} \frac{\partial(\mu_1 H_o \sin(\omega t))}{\partial t} \hat{y} \cdot \hat{y} dS - \oiint_{S_{ΕΒΓΖ}} \frac{\partial(\mu_2 H_o \sin(\omega t))}{\partial t} \hat{y} \cdot \hat{y} dS =$$

$$= -\omega H_o \cos(\omega t) \frac{\alpha^2}{2} (\mu_1 + \mu_2) \quad (\text{εφοσον} \quad S_{ΑΕΖΔ} = S_{ΕΒΓΖ} = \frac{\alpha^2}{2})$$

Το ρεύμα που αναπτύσσεται στο βρόχο είναι $I = \frac{E}{R} = -\omega H_o \cos(\omega t) \frac{\alpha^2}{2R} (\mu_1 + \mu_2)$

Η δύναμη που ασκείται από το μαγνητικό πεδίο στο ρεύμα της πλευράς ΑΒ είναι ίση κατά μέτρο και αντίθετης φορά με εκείνη που ασκείται στο ρεύμα της πλευράς ΓΔ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι

$$\overline{F}_{ΑΔ} = \alpha I(-\hat{x}) x \overline{B}_1 = \alpha(-\omega H_o \cos(\omega t) \frac{\alpha^2}{2R} (\mu_1 + \mu_2)) \mu_1 H_o \sin(\omega t)(-\hat{x} x \hat{y}) = \hat{z} \omega H_o^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \frac{\alpha^3}{2R} (\mu_1 + \mu_2)) \mu_1$$

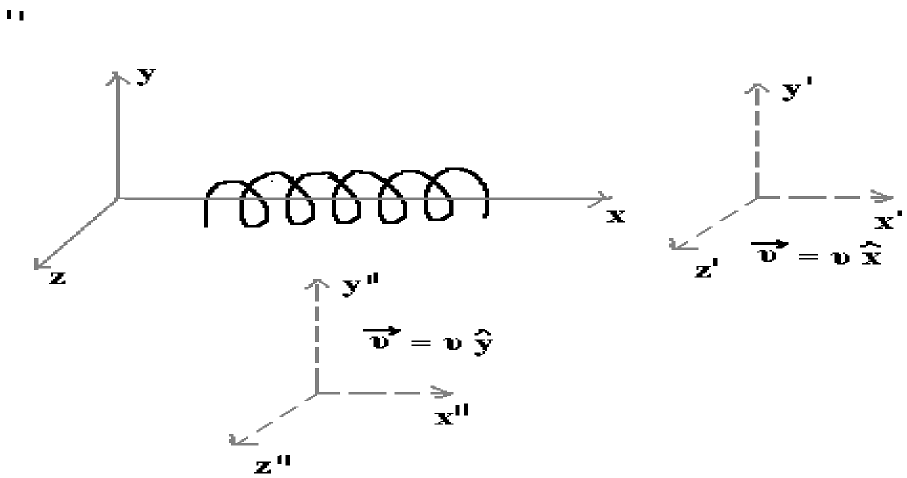
$$\overline{F}_{ΒΓ} = \alpha I(\hat{x}) x \overline{B}_2 = \alpha(-\omega H_o \cos(\omega t) \frac{\alpha^2}{2R} (\mu_1 + \mu_2)) \mu_2 H_o \sin(\omega t)(\hat{x} x \hat{y}) = -\hat{z} \omega H_o^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \frac{\alpha^3}{2R} (\mu_1 + \mu_2) \mu_2$$

Η συνολική δύναμη που ασκείται από το μαγνητικό πεδίο στο βρόχο είναι :

$$\overline{F}_{T} = \overline{F}_{A\Delta} + \overline{F}_{B\Gamma} = \hat{z}\omega H_o^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t)\frac{\alpha^3}{2R}(\mu_1^2 - \mu_2^2)$$

Για να παραμείνει αμετάβλητη η κινητική κατάσταση του βρόχου και να διατηρηθεί η σχετική του θέση ως προς τους δύο χώρους θα πρέπει να ασκηθεί δύναμη ίση κατά μέτρο με την $\overline{F}_{\Gamma}$ *και αντίθετης φοράς.*

<u>4.</u> Σωληνοειδές μήκους L, ακτίνας r ($L >> r$) έχει N σπείρες, διαρρέεται από ρεύμα I, βρίσκεται ακίνητο ως προς σύστημα συντεταγμένων $S(x, y, z)$ και ο άξονάς του είναι παράλληλος προς τον άξονα x του συστήματος. Να προσδιοριστεί το ρεύμα και το μαγνητικό πεδίο που θα υπολόγιζε ένας παρατηρητής κινούμενος με ταχύτητα $\upsilon = 3c/4$ α) παράλληλα και β) κάθετα προς τον άξονα του σωληνοειδούς.



α) *Παρατηρητής κινούμενος ως προς το S με ταχύτητα* $\overline{\upsilon} = \upsilon\hat{x}$ *(είναι ακίνητος ως προς το S' το οποίο κινείται επίσης με την ίδια ταχύτητα ως προς το S) υπολογίζει τα πεδία* $\overline{E}'_{\parallel}$, $\overline{E}'_{\perp}$, $\overline{B}'_{\parallel}$, $\overline{B}'_{\perp}$:

$$\overline{E}'_{\parallel} = (\overline{E} + \overline{\upsilon}\mathrm{x}\overline{B})_{\parallel} \quad , \quad \overline{B}'_{\parallel} = (\overline{B} - \frac{\overline{\upsilon}\mathrm{x}\overline{E}}{c^2})_{\parallel} \quad , \quad \overline{E}'_{\perp} = \gamma(\overline{E} + \overline{\upsilon}\mathrm{x}\overline{B})_{\perp} \quad , \quad \overline{B}'_{\perp} = \gamma(\overline{B} - \frac{\overline{\upsilon}\mathrm{x}\overline{E}}{c^2})_{\perp}$$

Επειδή $\overline{E}=0$ *και* $\overline{\upsilon} \,||\, \overline{B}$ *προκύπτει ότι :* $\overline{E}'_{\parallel} = 0$, $\overline{E}'_{\perp} = 0$, $\overline{B}'_{\parallel} = \overline{B}_{\parallel} = \mu_o \frac{N}{L} I\,\hat{x}$ *ενώ η συνιστώσα η κάθετη στη διεύθυνση της κίνησης είναι μηδέν* $\overline{B}'_{\perp} = \gamma\,\overline{B}_{\perp} = 0$

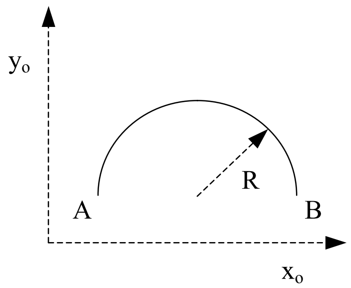
β) *Παρατηρητής κινούμενος ως προς το S με ταχύτητα* $\overline{\upsilon} = \upsilon\hat{y}$ *(είναι ακίνητος ως προς το S'' το οποίο κινείται επίσης με την ίδια ταχύτητα ως προς το S) υπολογίζει τα πεδία* $\overline{E}''_{\parallel}$, $\overline{E}''_{\perp}$, $\overline{B}''_{\parallel}$, $\overline{B}''_{\perp}$

$\overline{E}''_{\parallel} = (\overline{E} + \overline{\upsilon}x\overline{B})_{\parallel}$, $\overline{B}''_{\parallel} = (\overline{B} - \frac{\overline{\upsilon}x\overline{E}}{c^2})_{\parallel}$, $\overline{E}''_{\perp} = \gamma(\overline{E} + \overline{\upsilon}x\overline{B})_{\perp}$, $\overline{B}''_{\perp} = \gamma(\overline{B} - \frac{\overline{\upsilon}x\overline{E}}{c^2})_{\perp}$

Επειδή $\overline{E}=0$ *και* $\overline{\upsilon} \perp \overline{B}$ *προκύπτει για το ηλεκτρικό πεδίο ότι :* $\overline{E}''_{\parallel} = (\overline{\upsilon}x\overline{B})_{\parallel} = (\upsilon(\hat{y}x\hat{x})B)_{\parallel} = (-\hat{z}\upsilon B)_{\parallel} = 0$,

$\overline{E}''_{\perp} = \gamma(\overline{\upsilon}x\overline{B})_{\perp} = \gamma(-\hat{z}\upsilon B)_{\perp} = -\hat{z}\gamma\upsilon B = -\hat{z}\gamma\upsilon\mu_o \frac{N}{L} I$ *ενώ για το μαγνητικό :* $\overline{B}''_{\parallel} = \overline{B}_{\parallel} = 0$, $\overline{B}''_{\perp} = \gamma\overline{B}_{\perp} = \hat{x}\gamma\mu_o \frac{N}{L} I$

5. **Ένας αγωγός ημικυκλικού σχήματος, ακτίνας R, τοποθετείται στο επίπεδο xy μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_o \vec{z}_o$. Να υπολογίσετε την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού Α, Β όταν αυτός κινείται με σταθερή ταχύτητα α) $\vec{u} = u_o \vec{x}_o$ και β) $\vec{u} = u_o \vec{y}_o$.**



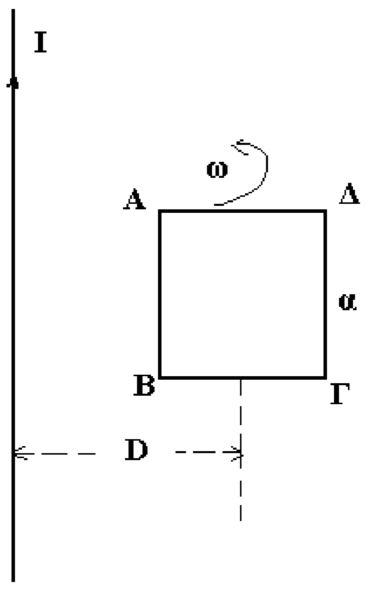
α) $\varepsilon = \int_A^B (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B (-u_o B_o \vec{y}_o) \cdot (dx\vec{x}_o + dy\vec{y}_o) = -u_o B_o \int_A^B dy = 0$

β) $\varepsilon = \int_A^B (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B (u_o B_o \vec{x}_o) \cdot (dx\vec{x}_o + dy\vec{y}_o) = u_o B_o \int_A^B dx = 2u_o B_o R$

6. **Θεωρείστε ένα ομογενές, ισότροπο και μη διαστελλόμενο σύμπαν. Οι ιδιότητες αυτές δηλώνουν ότι ο αριθμός των αστέρων είναι κατά μέσον όρο σταθερός ανά μονάδα όγκου σε κάθε τμήμα του σύμπαντος. Ορίζοντας λοιπόν ως p [W/m^3] την πυκνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος που εκπέμπεται από κάθε στοιχειώδη όγκο του σύμπαντος και θεωρώντας αυτήν σταθερή ποσότητα, να δείξετε ότι η νύκτα πάνω στη Γη όφειλε να είναι το ίδιο φωτεινή όπως και η ημέρα.**

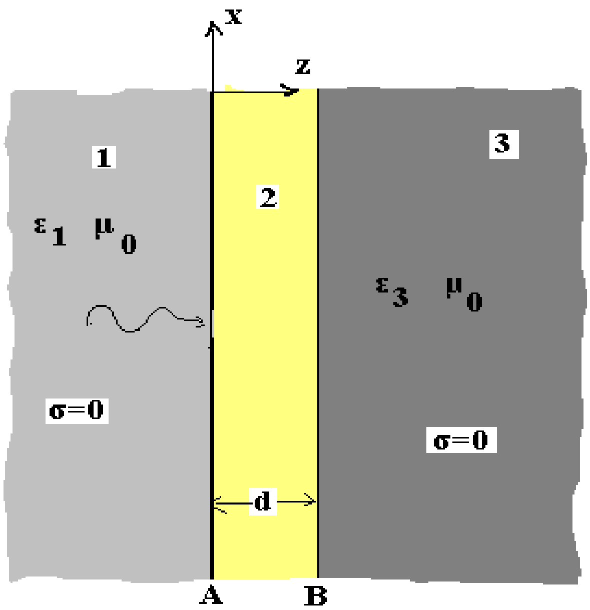
Ορίζοντας ένα σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων με κέντρο τη Γη, τότε ένα στοιχειώδες τμήμα του σύμπαντος που βρίσκεται στην θέση r,ϑ,φ *θα έχει όγκο* $r^2\sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$ *και θα εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ισχύος* $pr^2\sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$ *ισότροπα σε όλο τον χώρο. Η μέση τιμή του διανύσματος Poynting στη Γη θα είναι* $\frac{pr^2\sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi}{4\pi r^2}=\frac{p\sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi}{4\pi}$ *και εάν ορίσουμε* R *την ακτίνα της Γης, η ακτινοβολία που θα δέχεται η επιφάνειά της από το συγκεκριμένο στοιχειώδες τμήμα του σύμπαντος θα είναι* $\frac{pR^2\sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi}{4}$*. Η συνολική ισχύ που θα δέχεται η Γη από όλο το σύμπαν προκύπτει από την ολοκλήρωση* $\frac{pR^2}{4}\iiint\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr=\pi pR^2\int_{0}^{\infty}dr=\infty$*. Η εξωπραγματική αυτή τιμή δηλώνει ότι με αυτές* τις ιδιότητες του σύμπαντος τόσο την νύκτα όσο και την ημέρα θα είχαμε άφθονο φως!!!

7. Ένας τετράγωνος βρόχος σύρματος, πλευράς α, βρίσκεται κοντά σε έναν ευθύγραμμο αγωγό απεριορίστου μήκους. Ο ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I, βρίσκεται στο επίπεδο του βρόχου και απέχει από το "κέντρο" του τελευταίου απόσταση d. Ο συρμάτινος βρόχος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω και άξονα περιστροφής τον ευθύγραμμο αγωγό. Να υπολογίσετε την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στον βρόχο.



Η μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί το ρεύμα Ι σε απόσταση r από τον αγωγό είναι $\vec{B}=\frac{\mu_o I}{2\pi r}\hat{\varphi}$ *και η ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται το κάθε τμήμα του βρόχου που βρίσκεται σε απόσταση r είναι* $\vec{\upsilon}=\vec{\omega}x\vec{r}=\omega r\hat{\varphi}$*. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο βρόχο υπολογίζεται από τη σχέση* $E=\oint_C(\vec{\upsilon}x\vec{B})\cdot d\vec{l}-\oiint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{\varphi}dS$*. Η επαγωγή είναι ανεξάρτητη του χρόνου και επομένως το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με το μηδέν. Επίσης* $\vec{\upsilon}\parallel\vec{B}$ *άρα* $\vec{\upsilon}x\vec{B}=0$ *και τελικά Ε=0.*

<u>8.</u> Ηλεκτρομαγνητικό κύμα $\vec{E}_1^i = E_o e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega t}\vec{x}_o$, $\vec{H}_1^i = H_o e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega t}\vec{y}_o$ προσπίπτει κάθετα στην επιφάνεια πλάκας από διηλεκτρικό υλικό με χαρακτηριστικά $\varepsilon_2, \mu_2 = \mu_o, \sigma_2 = 0$ και πάχους d. Με δεδομένα τα χαρακτηριστικά των χώρων 1 και 3 να προσδιορίσετε το πάχος d και την ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε_2 ώστε στο χώρο 1 να μην υπάρχει ανακλώμενο κύμα.



Σύμφωνα με το σχήμα, στην περιοχή 1 θα υπάρχει προσπίπτον E_{1x}^i *και ανακλώμενο* E_{1x}^r *κύμα ,στην περιοχή 2 κύμα έντασης* E_{2x}^i *διαδιδόμενο προς τη διεύθυνση* $+\hat{z}$ *καθώς και κύμα έντασης* E_{2x}^r *διαδιδόμενο προς τη διεύθυνση* $-\hat{z}$ *ενώ στην περιοχή 3 δεδομένου ότι το διηλεκτρικό εκτείνεται μέχρι το άπειρο δεν συμβαίνει πουθενά ανάκλαση και υπάρχει μόνο προσπίπτον* E_{3x}^i *κατά τη διεύθυνση* $-\hat{z}$. *Ζητούμενο στην άσκηση είναι* E_{1x}^r *=0. Επειδή οι εφαπτομενικές συνιστώσες των Ε και Η στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διηλεκτρικών, όπου δεν υπάρχουν ρεύματα ή φορτία, παραμένουν αμετάβλητες στην επιφάνεια Α(z=0) θα ισχύει* $E_{1x}^i + E_{1x}^r = E_{2x}^i + E_{2x}^r$, $H_{1x}^i + H_{1x}^r = H_{2x}^i + H_{2x}^r \Rightarrow \frac{E_{1x}^i}{\eta_1} - \frac{E_{1x}^r}{\eta_1} = \frac{E_{2x}^i}{\eta_2} - \frac{E_{2x}^r}{\eta_2}$ *από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι* $E_{1x}^i = E_{2x}^i(\frac{\eta_2 + \eta_1}{2\eta_2}) + E_{2x}^r(\frac{\eta_2 - \eta_1}{2\eta_2})$, $E_{1x}^r = E_{2x}^i(\frac{\eta_2 - \eta_1}{2\eta_2}) + E_{2x}^r(\frac{\eta_2 + \eta_1}{2\eta_2})$.

Αντίστοιχα η συνοριακή συνθήκη για το επίπεδο Β(z=d) είναι $E_{2x}^i e^{-j\beta_2 d} + E_{2x}^r e^{j\beta_2 d} = E_{3x}^i e^{-j\beta_3 d}$

$$\frac{E_{2x}^i}{\eta_2} e^{-j\beta_2 d} - \frac{E_{2x}^r}{\eta_2} e^{j\beta_2 d} = \frac{E_{3x}^i}{\eta_3} e^{-j\beta_3 d}\ ,\ E_{2x}^i = E_{3x}^i e^{j\beta_2 d} e^{-j\beta_3 d}(\frac{\eta_3 + \eta_2}{2\eta_3}), E_{2x}^r = -E_{3x}^i e^{-j\beta_2 d} e^{-j\beta_3 d}(\frac{\eta_2 - \eta_3}{2\eta_3})$$

$$E_{1x}^r = E_{3x}^i e^{-j\beta_3 d}[(\frac{\eta_2-\eta_1}{2\eta_2})(\frac{\eta_2+\eta_3}{2\eta_3})e^{j\beta_2 d} - (\frac{\eta_2+\eta_1}{2\eta_2})(\frac{\eta_2-\eta_3}{2\eta_3})e^{-j\beta_2 d}] = ...$$

$$... = E_{3x}^i e^{-j\beta_3 d} e^{j\beta_2 d}[\frac{(\eta_2-\eta_1)(\eta_2+\eta_3)}{4\eta_2\eta_3} - \frac{(\eta_2+\eta_1)(\eta_2-\eta_3)}{4\eta_2\eta_3}\cos(2\beta_2 d) + j\frac{(\eta_2+\eta_1)(\eta_2-\eta_3)}{4\eta_2\eta_3}\sin(2\beta_2 d)]$$

Για να μην υπάρχει ανακλώμενο κύμα στην περιοχή 1 ($E_{1x}^r = 0$*) θα πρέπει το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής παράστασης που βρίσκεται στην αγκύλη να είναι μηδέν.*

Αν $2\beta_2 d = (2m+1)\pi$ *(α) τότε το φανταστικό μέρος θα είναι μηδέν. Για να μηδενίζεται και το πραγματικό και επειδή* $\cos(2\beta_2 d) = -1$ *θα πρέπει* $(\eta_2-\eta_1)(\eta_2+\eta_3)+(\eta_2+\eta_1)(\eta_2-\eta_3)=0$ *(β). Από την συνθήκη (α) προκύπτει ότι το ελάχιστο πάχος που θα πρέπει να έχει το διηλεκτρικό 2 είναι*

$d = \lambda_2/4$ *όπου* $\lambda_2 = 1/(f\sqrt{\mu_0\varepsilon_2})$. *Από τη (β) προκύπτει ότι* $\eta_2 = \sqrt{\eta_1\eta_3}$.

9. Ένας ευθύγραμμος κυλινδρικός αγωγός "απείρου" μήκους διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I. Να δείξετε ότι η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που αποθηκεύεται ανά μονάδα μήκους στο εσωτερικό του αγωγού είναι ανεξάρτητη της ακτίνας του αγωγού. (Να θεωρήσετε ομογενή πυκνότητα ρεύματος στο εσωτερικό του αγωγού)

Θεωρείται γνωστό ότι η μαγνητική επαγωγή στην περίπτωση του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού "απείρου" μήκους έχει αζιμουθιακή διεύθυνση και μέτρο $B(r) = \frac{\mu_o j r}{2}$*, όπου* r *η απόσταση από το κέντρο του αγωγού και* j *η πυκνότητα του ρεύματος, η οποία αν η ακτίνα του κυλινδρικού αγωγού είναι* R *τότε προκύπτει από τη σχέση* $I = j\pi R^2$. *Η πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου είναι* $u_m = \frac{B^2}{2\mu_o} = \frac{\mu_o j^2 r^2}{8}$ *και η ανά μονάδα μήκους αποθηκευμένη ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού*

$$\frac{dU_m}{dz} = \int_0^{2\pi}\int_0^R u_m r dr d\phi = \frac{\mu_o j^2}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 dr d\phi = \frac{\mu_o \pi j^2}{4}\int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_o \pi j^2 R^4}{16} = \frac{\mu_o I^2}{16\pi}.$$

10. Όταν ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται μέσα σε ένα υλικό με χαρακτηριστικά ε, μ, σ δημιουργεί δύο είδη ρευμάτων. Το ρεύμα μετατόπισης και το ρεύμα αγωγιμότητας.

α) Να δείξετε ότι τα δύο ρεύματα έχουν εξ ορισμού διαφορά φάσης 90°.

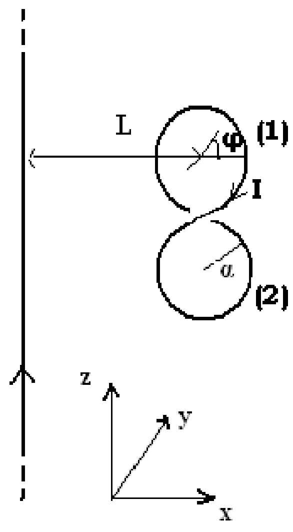
β) **Να αναφέρετε τις περιπτώσεις κατά τις οποίες το ένα από τα δύο ρεύματα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο σε σχέση με το άλλο.**

γ) **Ποιό από τα δύο ρεύματα σχετίζεται με τις απώλειες της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και γιατί;**

α)Εξ ορισμού το ρεύμα αγωγιμότητας $\vec{j}_f = \sigma\vec{E}$ *και το ρεύμα μετατόπισης* $\vec{j}_D = \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, *όπου* $\vec{E}$ *η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Θεωρώντας ότι η εξάρτιση της τελευταίας από τον χρόνο περιγράφεται στην περίπτωση ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος από τη σχέση* $\vec{E} = \vec{E}_r\sin(\omega t)$, *τότε* $\vec{j}_f = \sigma\vec{E}_r\sin(\omega t)$ *και* $\vec{j}_D = \omega\varepsilon\vec{E}_r\cos(\omega t)$. *Άρα τα δύο ρεύματα έχουν πάντα διαφορά φάσης 90°.*

β) Ο λόγος των δύο ρευμάτων $\dfrac{|\vec{j}_f|}{|\vec{j}_D|} = \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$. *Εφ' όσον* $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$, *δηλ. σε καλούς αγωγούς και σε σχετικά χαμηλές συχνότητες, τότε το ρεύμα μετατόπισης θεωρείται αμελητέο, ενώ όταν* $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$, *δηλ. σε καλούς μονωτές και σε σχετικά υψηλές συχνότητες, τότε το ρεύμα.*

11. **Θεωρούμε το σύστημα ενός ευθύγραμμου αγωγού απεριορίστου μήκους και ενός πλαισίου από αγώγιμο σύρμα, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Ο ευθύγραμμος αγωγός βρίσκεται στο επίπεδο του πλαισίου (**xz**) και διαρρέεται από ρεύμα έντασης** $I = I_o e^{j\omega t}$ **. Να υπολογιστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο πλαίσιο.**



Θεωρούμε κατ' αρχήν μια αυθαίρετη φορά για το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο. Η ροή που διέρχεται από την περιοχή (1) είναι

$$\Phi_1 = \oiint_{S_1} \vec{B} \cdot d\bar{S} = \oiint_{S_1} \frac{\mu_o}{2\pi x} I_z (\hat{z} \cdot \hat{y}) dS = (\hat{z} \cdot \hat{y}) I_z \oiint_{S_1} \frac{\mu_o}{2\pi x} dS = ... = \Phi_1 = (\hat{z} \cdot \hat{y}) I_z [(L^2 - \alpha^2)^{1/2} - L]$$

Αντίστοιχα η ροή στην περιοχή (2) είναι

$$\Phi_2 = \oiint_{S_2} \vec{B} \cdot d\bar{S} = \oiint_{S_2} \frac{\mu_o}{2\pi x} I_z (\hat{z} \cdot (-\hat{y})) dS = (\hat{z} \cdot (-\hat{y})) I_z \oiint_{S2} \frac{\mu_o}{2\pi x} dS = (\hat{z} \cdot (-\hat{y})) I_z [(L^2 - \alpha^2)^{1/2} - L]$$

Προφανώς η συνολική ροή που περνά από την επιφάνεια του πλαισίου είναι μηδέν και η ηλεκτρεγερτική δύναμη επίσης μηδέν.

12. **Ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδιδόμενο αρχικά σε χώρο με τιμές της ηλεκτρικής επιτρεπτότητας και της μαγνητικής διαπερατότητας ε_1 και μ_0 αντίστοιχα (σ_1=0) εισέρχεται σε δεύτερο διηλεκτρικό με σταθερές ε_2 και μ_0 (σ_2=0). Είναι δυνατόν η ένταση του διερχόμενου ηλεκτρικού πεδίου να είναι μεγαλύτερη από εκείνη του προσπίπτοντος και με ποια προϋπόθεση; Θα ήταν δυνατόν να ισχύει το ίδιο και για τη διερχόμενη ισχύ;**
(Οι απαντήσεις να συνοδεύονται από μαθηματική απόδειξη).

Σύμφωνα με τη σχέση που συνδέει το διερχόμενο, E_t*, με το προσπίπτον πεδίο,* E_i*,* $\frac{E_t}{E_i} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}$*. Όταν* $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ *τότε* $E_t > E_i$*. Στο φαινόμενο όμως δεν είναι δυνατόν να μην ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας (Η προσπίπτουσα ισχύς είναι ίση με το άθροισμα της ανακλώμενης και της διερχόμενης ισχύος). Η ηλεκτρομαγνητική ισχύς του κύματος δεν μεταφέρεται μόνο από την ένταση του ηλεκτρικού του πεδίου αλλά και από εκείνη του μαγνητικού. Από τη σχέση* $\frac{H_t}{H_i} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}$ *προκύπτει ότι* $H_t < H_i$ *και ποιοτικά τουλάχιστον μπορούμε να υποθέσουμε ότι το διερχόμενο μαγνητικό πεδίο είναι , αντίθετα από το ηλεκτρικό, τόσο μικρότερο από το προσπίπτον ώστε να ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας.*

Μια ακριβής απόδειξη προκύπτει εύκολα αν υπολογιστούν η προσπίπτουσα , η διερχόμενη και η ανακλώμενη ισχύς.

Αν η ένταση του προσπίπτοντος ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι

$\vec{E}_i = \hat{x}E_0 e^{-jk_1 z} e^{j\omega t}$ $\vec{H}_i = \hat{y}H_0 e^{-jk_1 z} e^{j\omega t}$ *και οι συντελεστές διέλευσης και ανάκλασης*

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}} \qquad R = \frac{(\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2})}{(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})}$$

Η μέση ως προς το χρόνο προσπίπτουσα ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας (στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο διηλεκτρικών) είναι:

$$< P^i >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^i x(\vec{H}^i)^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^i x(\vec{E}^i/\eta)^*) = \frac{1}{2}\frac{|E^i|^2}{\eta}\hat{z}$$

Η διερχόμενη ισχύς είναι

$$< P^t >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^t x(\vec{H}^t)^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^t x(\frac{\vec{E}^t}{\eta_2})^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[T\cdot\vec{E}^i x(T\cdot(\frac{\vec{E}^i}{\eta_2}))^*] = \frac{1}{2}T^2\frac{|E^i|^2}{\eta_2}\hat{z} = T^2\frac{\eta_1}{\eta_2} < P^i > \hat{z}$$

$$T^2\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{4(\sqrt{\varepsilon_1})^2}{(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^2}\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{4\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2}}{(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^2}$$

αλλά $\frac{4\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2}}{(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^2} < 1$ επειδή $(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^2 - 4\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2} = (\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2})^2 > 0)$

(η τελευταία ανισότητα ισχύει ανεξάρτητα από το ποιά διηλεκτριή σταθερά είναι μεγαλύτερη)

Άρα $[< P^t >] < [< P^i >]$

Η αν λάβουμε υπόψη ότι η ανακλώμενη ισχύς είναι

$$< P^r >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^r x(\vec{H}^r)^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^r x(-H^r\hat{y})^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^r x(-E^r\hat{y})^*)\frac{1}{2}\mathrm{Re}[R\cdot\vec{E}^i x(R\cdot(-\frac{E^i}{n_1}\hat{y}))^*] =$$

$$= \frac{1}{2}R^2\frac{|E^i|^2}{\eta_1}\hat{z} = -R^2 < P^i > \hat{z}$$

Τότε $\left|< P^r >\right| + \left|< P^t >\right| = (R^2 + T^2\frac{\eta_1}{\eta_2})\left|< P^i >\right| = [\frac{(\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2})^2}{(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^2} + \frac{4(\sqrt{\varepsilon_1})^2}{(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^2}\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}]\left|< P^i >\right| = \left|< P^i >\right|$