ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ

1. Ηλεκτρικό δυναμικό $\varphi_1(x,y,z,t)$ και μαγνητικό δυναμικό $A_1(x,y,z,t)$ αντιστοιχούν σε πεδίο E,B. Θα ήταν δυνατόν δύο άλλα δυναμικά $\varphi_2(x,y,z,t)=\varphi_1(x,y,z,t)+\varphi(t)$ (η συνάρτηση φ εξαρτάται μόνο από το χρόνο) και $A_2=A_1+A(x,y,z,t)$ να αντιστοιχούν στις ίδιες τιμές πεδίων;

Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς βαθμίδας (σελ. 196-7 του βιβλίου) είναι δυνατόν τα δυναμικά φ_2 *και* $\mathbf{A}_2$ *να αντιστοιχούν στις ίδιες τιμές των πεδίων αρκεί* $\mathbf{A} = \nabla\psi$ *και* $\varphi = -\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$, *όπου* ψ *μια αριθμητική συνάρτηση η οποία σύμφωνα με τη πρώτη σχέση και τα δεδομένα της άσκησης οφείλει να εξαρτάται τόσο από τη θέση όσο και από τον χρόνο (το πρόσθετο διανυσματικό δυναμικό* $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z,t)$*). Τούτο όμως σημαίνει ότι και η πρώτη χρονική παράγωγος της* ψ *εξαρτάται από τις συντεταγμένες θέσεις και το ίδιο πρέπει να συμβαίνει, σύμφωνα με τη δεύτερη σχέση, και με το πρόσθετο αριθμητικό δυναμικό* φ. *Η απαίτηση όμως αυτή αντιτίθεται στα δεδομένα της άσκησης και συνεπώς η απάντηση είναι αρνητική.*

2. Ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με συχνότητα 150 MHz διαδίδεται μέσα σε ένα μη αγώγιμο διηλεκτρικό υλικό, του οποίου η σχετική ηλεκτρική επιτρεπτότητα είναι $\varepsilon_r=4$ και η σχετική μαγνητική διαπερατότητα είναι $\mu_r=1$. Αν το κύμα είναι γραμμικά πολωμένο και μεταφέρει κατά τη διεύθυνση του άξονα x μέση ισχύ $1/120\pi$ W/m^2, να περιγράψετε τις αναλυτικές μαθηματικές εκφράσεις της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και της μαγνητικής επαγωγής.

Το κύμα διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x. Εφόσον το κύμα είναι γραμμικά πολωμένο μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι παράλληλη της διεύθυνσης του άξονα y (ή οποιαδήποτε άλλη, αρκεί η διεύθυνσή της να είναι κάθετη προς τον άξονα x). Άρα $\mathbf{E} = E_o e^{j(\omega t-\beta x)}\mathbf{y}_o$ *και* $\mathbf{B} = B_o e^{j(\omega t-\beta x)}\mathbf{z}_o$ *όπου η γωνιακή συχνότητα* $\omega = 2\pi f = 3\pi 10^8\, rad/s$, *η ταχύτητα φάσης* $\upsilon = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} = c/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = c/2$, *η σταθερά διάδοσης* $\beta = \omega/\upsilon = 2\omega/c = 2\pi\, rad/m$, *το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου*

$E_o = \left[2S\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\right]^{1/2} = \left[2S\sqrt{\dfrac{\mu_o\mu_r}{\varepsilon_o\varepsilon_r}}\right]^{1/2} = \left[2\cdot\dfrac{1}{120\pi}\cdot 120\pi\cdot\sqrt{\dfrac{1}{4}}\right]^{1/2} = 1V/m$ *και το πλάτος της μαγνητικής επαγωγής* $B_o = E_o/\upsilon = 2E_o/c \approx 6.7nT$.

3. Δυο ίσα και ετερώνυμα σημειακά φορτία 1μC διατηρούνται ακίνητα σε απόσταση 1m μεταξύ τους μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο του οποίου η μαγνητική επαγωγή μεταβάλλεται με ρυθμό 10^{-4}T/s. Ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται εξ αιτίας τόσο της ύπαρξης των φορτίων όσο και της μεταβολής του μαγνητικού πεδίου. Πόση είναι η στροφή της έντασης αυτού του ηλεκτρικού πεδίου.

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται εξ αιτίας των φορτίων είναι αστρόβιλο (ηλεκτροστατικό πεδίο). Συνεπώς $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} = -10^{-4}\, T/s$.

4. Κυκλικό πλαίσιο ωμικής αντίστασης R βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B_1=B_mz. Την χρονική στιγμή t=0 η ακτίνα του πλαισίου αρχίζει να μεγαλώνει με ταχύτητα υ (υποθέτουμε ότι η αρχική τιμή της ακτίνας είναι μηδέν και ότι, παρόλο που το μήκος το σύρματος μεγαλώνει, η συνολική ωμική του αντίσταση παραμένει σταθερή) και συγχρόνως εφαρμόζεται ένα δεύτερο μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B_2= -B_m(t/κ)z (to κ είναι σταθερά , με διαστάσεις χρόνου). Να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο και να διερευνηθεί το μέτρο και η φορά του σαν συνάρτηση του χρόνου.

Η συνολική μαγνητική επαγωγή είναι $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = B_m(1-\dfrac{t}{\kappa})\mathbf{z}$. *Εάν ορίσουμε (αυθαίρετα) τη φορά διαγραφής της περιμέτρου του πλαισίου τέτοια ώστε το διάνυσμα της επιφάνειας του να έχει τη διεύθυνση του άξονα z τότε η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο θα είναι* $\Phi(t) = \mathbf{B}_t \cdot \mathbf{S} = \pi(\upsilon t)^2 B_m\left(1-\dfrac{t}{\kappa}\right)$. *Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι* $\varepsilon = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \pi\upsilon^2 B_m(\dfrac{3}{\kappa}t^2 - 2t)$ *και η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει* $I = \dfrac{\varepsilon}{R}$. *Άρα για* $0 < t < 2\kappa/3$ *το ρεύμα προκύπτει αρνητικό που σημαίνει ότι έχει αντίθετη φορά από αυτήν της διαγραφής του πλαισίου. Για* $t = 0$ *και* $t = 2\kappa/3$ $I = 0$. *Για* $t > 2\kappa/3$ *το ρεύμα προκύπτει θετικό που σημαίνει ότι έχει τη ίδια φορά με αυτήν της διαγραφής του πλαισίου.*

5. Δυο ηλεκτρικά δίπολα έχουν παράλληλες διπολικές ροπές (διευθυνόμενες προς τον άξονα z) και αρμονικά μεταβαλλόμενες με τον χρόνο (p_n=$p_0$exp(jω_nt), όπου n=1,2). Οι συχνότητες βρίσκονται στην περιοχή του ορατού και είναι f_1=4.3$10^{14}$Hz (ερυθρό), f_2=7.5$10^{14}$Hz (ιώδες). Ποιό

είναι το χρώμα του φωτός που θα αντιληφθεί παρατηρητής ευρισκόμενος α) στον άξονα z και β) σε διεύθυνση κάθετη προς τον άξονα z.

Στη σελίδα 226 του βιβλίου δίνεται η ισχύς (διάνυσμα Poynting) που ακτινοβολείται από χρονικά μεταβλητό δίπολο $\mathbf{S} = \dfrac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_o c^3 r^2}\hat{\mathbf{r}}_o$ *, όπου* $\ddot{\mathbf{p}}_n = \dfrac{\partial^2 \mathbf{p}_n}{\partial t^2} = -\omega_n^2 \mathbf{p}_o e^{i\omega_n t}$ *και θ η γωνία των διανυσμάτων* $\hat{\mathbf{z}}_o$ *και* $\hat{\mathbf{r}}_o$*. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι:*

α) Εάν ο παρατηρητής βρίσκεται στον άξονα z (θ=0°) δεν αντιλαμβάνεται τίποτα, ενώ εάν βρίσκεται σε διεύθυνση κάθετη προς τον άξονα z (θ=90°) δέχεται τη μέγιστη δυνατή ισχύ που εκπέμπουν τα δίπολα .

β) Το διάνυσμα Poynting είναι ανάλογο του ω^4*. Συνεπώς* $\dfrac{S_2}{S_1} = \left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^4 = \left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)^4 \approx 9.4$ *που σημαίνει ότι ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται το ιώδες.*

6. Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σε μία χάλκινη σφαίρα με διάμετρο 10 cm είναι ίση με 100/π nC/m^2.

α) Πόσο είναι το συνολικό φορτίο που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που κινείται ισοταχώς με σχετική, ως προς τη σφαίρα, ταχύτητα 25 m/s;

β) Ποια είναι η ένταση και η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής όταν βρίσκεται σε απόσταση 5 m κάτω από τη σφαίρα. (Θεωρείστε ότι ο παρατηρητής κινείται στον άξονα x με την προαναφερόμενη ταχύτητα και ότι το κέντρο της σφαίρας βρίσκεται στη θέση $5y_o$ [m])

α) Το συνολικό φορτίο παραμένει το ίδιο σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς (διατήρηση συνολικού φορτίου, σελ. 332) και είναι ίσο με $4\pi r^2\sigma = 1$ *nC.*

β) Στο σύστημα αναφοράς της σφαίρας υπάρχει μόνο το ακτινικό ηλεκτροστατικό πεδίο της φορτισμένης σφαίρας ($B_x = 0$*,* $B_y = 0$ *και* $B_z = 0$*). Η απόσταση σφαίρας-παρατηρητή είναι α=5m στον άξονα y και παραμένει η ίδια τόσο στο σύστημα αναφοράς της σφαίρας όσο και στου παρατηρητή. Στην απόσταση αυτή το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι* $E_x = 0$*,* $E_y = -q/4\pi\varepsilon_o\alpha^2$ *και* $E_z = 0$ *Με βάση του μετασχηματισμούς που περιγράφονται στην σελ. 321 το μαγνητικό πεδίο στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή είναι* $B'_x = 0$*,* $B'_y = 0$ *και* $B'_z = \gamma\upsilon q/4\pi c^2\varepsilon_o\alpha^2$*. Επειδή* $\gamma=1$ *(*$\upsilon/c = 25/3\cdot10^8 \approx 0$*),* $1/\varepsilon_o c^2 = \mu_o$ *και* $H=B/\mu_o$ *προκύπτει ότι* $H = \upsilon q/4\pi\alpha^2\, z_o = 1/4\pi\, z_o$ *[nA/m].*

7. Τετράγωνο συρμάτινο πλαίσιο, πλευράς d, κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = v_o y_o$ σε μη ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής $B = B_o \sin(\pi y/d)\, z_o$. Το επίπεδο του πλαισίου συμπίπτει με το επίπεδο xy. Να υπολογιστεί η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο πλαίσιο.

Έστω ότι το τετράγωνο πλαίσιο ΑΒΓΔ έχει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στον άξονα x και τις πλευρές ΒΓ και ΔΑ στον άξονα y. Εάν η κίνηση της πλευράς ΑΒ περιγράφεται με την εξίσωση $y_{AB}=u_o t$ τότε η κίνηση της πλευράς ΓΔ θα περιγράφεται από την εξίσωση $y_{\Gamma\Delta}=d+u_o t$. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι $\varepsilon = \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^d u_o B_o \sin(\frac{\pi u_o t}{d}) dx - \int_0^d u_o B_o \sin(\frac{\pi(u_o t + d)}{d}) dx$ *[V]*

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει αν λάβουμε υπόψη ότι η διεύθυνση του εξωτερικού γινομένου $\vec{u} \times \vec{B}$ *είναι κατά τη διεύθυνση και φορά του άξονα x. Έτσι στο κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αφενός δεν λαμβάνονται υπόψη οι πλευρές ΒΓ και ΔΑ, αφετέρου η φορά διαγραφής του πλαισίου καθορίζει το θετικό πρόσημο στη πλευρά ΑΒ και το αρνητικό στη πλευρά ΓΔ. Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι* $\varepsilon = u_o B_o d \sin(\frac{\pi u_o t}{d}) - u_o B_o d \sin(\frac{\pi u_o t}{d} + \pi) = 2 u_o B_o d \sin(\frac{\pi u_o t}{d})$ *[V]*

8. Φορτισμένο σωματίδιο μάζας $17 \cdot 10^{-28}$ Kg και φορτίου $1.6 \cdot 10^{-19}$ C είναι ακίνητο ως προς σύστημα συντεταγμένων (x,y,z), σε χώρο (ε_o, μ_o), στη θέση (0,0,0). Από τη χρονική στιγμή t=0 και μετά δέχεται την επίδραση επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος $E = E_o \cos(\omega t - \beta x)\, z_o$ όπου E_o= 1V/m και f = 1GHz

α) Θεωρώντας αμελητέα τη μαγνητική δύναμη (δύναμη Laplace) που ασκείται στο σωματίδιο να υπολογιστεί η ηλεκτρομαγνητική ισχύς που ακτινοβολείται από το φορτίο.

β) Να αιτιολογηθεί η προσέγγιση που έγινε αποδεκτή στο προηγούμενο σκέλος της άσκησης.

α) Εφόσον η μόνη δύναμη που ασκείται στο φορτίο είναι η δύναμις Coulomb $\vec{F} = q\vec{E}$ *τότε η επιτάχυνση του φορτίου θα είναι* $\vec{\gamma} = \frac{qE_o}{m} \cos(\omega t) \vec{z}_o$ *[m/s²] και η ισχύς που ακτινοβολείται από το φορτίο (σελ. 227)* $p = \frac{2q^4 E_o^2}{12\pi\varepsilon_o c^3 m^2} \cos^2(\omega t) \approx 5 \cdot 10^{-38} \cos^2(2 \cdot 10^9 \pi t)$ *[W]*

β) Η δύναμη Laplace είναι ίση με $q\vec{u} \times \vec{B}$*. Δεδομένου ότι το φορτίο είναι αρχικά ακίνητο η δύναμη αυτή αρχικά είναι ίση με μηδέν. Προκύπτει διάφορη του μηδενός εφόσον τον φορτίο αρχίζει να κινείται στον άξονα z υπό την επίδραση της δύναμης Coulomb. Συγκρίνοντας τα μέτρα των δύο δυνάμεων καταλήγουμε στο ότι* $\frac{F_L}{F_C} = \frac{quB}{qE} = \frac{u}{c}$ *(Στα επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα E/B=c).*

Πόση όμως είναι η ταχύτητα του φορτίου; Επειδή γνωρίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα την επιτάχυνση του φορτίου εξαιτίας της δύναμης Coulomb εύκολα υπολογίζουμε την z-συνιστώσα της ταχύτητας από τη σχέση $u_z = \int \gamma dt = \frac{qE_o}{\omega m}\sin(\omega t)$ *[m/s] (μην ξεχνάτε ότι το φορτίο είναι ακίνητο στην αρχή). Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ότι, η μέγιστη τιμή της ταχύτητας είναι περίπου 15 mm/s, που είναι σε σύγκριση με τη ταχύτητα του φωτός αμελητέα. Έτσι, σε πρώτη προσέγγιση, αμελητέα θα είναι και η επίδραση της δύναμης Laplace.*

9. Πηγή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας εκπέμπει ισότροπα ισχύ P. Η πηγή περιβάλλεται σφαιρικά έως την απόσταση R από ομογενές και ισότροπο διηλεκτρικό με απώλειες. Εάν σε απόσταση r >> R (δηλ. στον ελεύθερο χώρο) το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι E_0 να υπολογιστεί το σύνολο της ισχύος που αποθηκεύεται και καταναλίσκεται στον χώρο του διηλεκτρικού.

Το διάνυσμα Poynting σε απόσταση r >> R από την πηγή είναι $S = E_o^2 / 2c\mu_o$ *[W/m²] και η συνολική ισχύς που διέρχεται από τη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r,* $P_r = 2\pi r^2 E_o^2 / c\mu_o$ *[W]. Η ισχύς αυτή είναι ίση με τη εκπεμπόμενη ισχύ από την πηγή μείον την ισχύ που έχει αποθηκευτεί και καταναλωθεί στον χώρο του διηλεκτρικού. Άρα η ισχύς που αποθηκεύεται και καταναλίσκεται στο διηλεκτρικό θα είναι ίση με* $P - P_r = P - 2\pi r^2 E_o^2 / c\mu_o$ *[W].*

10. Φορτίο q βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα x και κινείται ισοταχώς με ταχύτητα $\upsilon = c/2\ x_o$. Κάποια χρονική στιγμή το αριθμητικό δυναμικό στην αρχή των αξόνων γίνεται ίσο με φ. Ποια είναι η θέση του φορτίου εκείνη τη χρονική στιγμή;

Το δυναμικό φ περιγράφεται από τις σχέσεις των Lienard και Wiechert (σελ. 232) $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r' - \vec{\beta}'\cdot\vec{r}'}$ *όπου* $\vec{\beta}' = \vec{\upsilon}'/c = 1/2\vec{x}_o$ *και* $\vec{r}' = -x'\vec{x}_o$. *(Υπόψη ότι όλα τα τονούμενα σύμβολα αναφέρονται στον παρελθόντα χρόνο t' και όχι τη χρονική στιγμή t που μας ενδιαφέρει και ότι το* $\vec{r}'$ *είναι το διάνυσμα θέσης της αρχής των αξόνων από το φορτίο). Εάν κάνουμε τις πράξεις προκύπτει η παρελθούσα θέση του φορτίου* $x' = \frac{q}{6\pi\varepsilon_o\varphi}$ *δηλ. η θέση του φορτίου τη χρονική στιγμή t'.*

Από τότε μεσολάβησε χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t' = x'/c$, *όσο χρόνο δηλ. χρειάστηκε η ακτινοβολία για να φθάσει στην αρχή των αξόνων. Σ' αυτό το χρονικό διάστημα το φορτίο μετακινήθηκε στην* *παρούσα του θέση* $x = x' + \upsilon \cdot \Delta t = 3x'/2$. *Άρα* $x = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o\varphi}$. *(Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε τις σχετικιστικές σχέσεις της σελ. 327).*

11. Όταν ένα αεροσκάφος πετάει μέσα στο γήινο μαγνητικό πεδίο τότε αναπτύσσεται κατά μήκος των πτερυγίων του ηλεκτρεγερτική δύναμη. Πιστεύετε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτή η ηλεκτρεγερτική δύναμη (ανεξάρτητα από το μέγεθός της) για τις ενεργειακές ανάγκες του αεροσκάφους; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Όχι, διότι σε οποιοδήποτε ηλεκτρικό κύκλωμα, που θα συνδεθεί στα άκρα των πτερυγίων, θα αναπτυχθεί η ίδια ηλεκτρεγερτική δύναμη με την ίδια φορά ώστε να αναιρείται αυτή που αναπτύσσεται κατά μήκος των πτερυγίων.

12. Πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος συνδέεται με επίπεδο πυκνωτή χωρητικότητας C, του οποίου οι οπλισμοί είναι κυκλικοί δίσκοι επιφάνειας S. Εάν η τάση της πηγής είναι $V = V_o \sin(\omega t)$ να υπολογίσετε την επαγωγή του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή.
(Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του πυκνωτή θεωρείται ομογενές και η έντασή του είναι $|\vec{E}| = \sigma/\varepsilon_o$, όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στους οπλισμούς.)

Το φορτίο των οπλισμών του πυκνωτή είναι $q = CV_o \sin(\omega t)$. *Το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι* $|E| = CV_o \sin(\omega t)/S\varepsilon_o$, *ενώ η διεύθυνσή της είναι παράλληλη με τον άξονα του πυκνωτή. Το ομογενές και χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο συνοδεύεται από μαγνητικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι κάθετοι στον άξονα του πυκνωτή. Το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής σε απόσταση r από τον άξονα του πυκνωτή προκύπτει από την τέταρτη εξίσωση του Maxwell με τη χρήση του θεωρήματος Stokes* $\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S'} \varepsilon_o \mu_o \dfrac{\partial \vec{E}}{dt} \cdot d\vec{s} \Rightarrow |\vec{B}| = \dfrac{\mu_o r C V_o \omega}{2S} \cos(\omega t)$.

13. Μακρύ σωληνοειδές ακτίνας α, μήκους l και αριθμού σπειρών N διαρρέεται από ρεύμα I. Η ηλεκτρική αντίσταση του σωληνοειδούς θεωρείται αμελητέα, ενώ τα άκρα του συνδέονται με αγωγό του οποίου τόσο η ηλεκτρική αντίσταση όσο και η αυτεπαγωγή θεωρούνται επίσης αμελητέες. Σε όλο το κύκλωμα δεν υπάρχει πηγή, η μαγνητική ροή δηλ. παραμένει σταθερή.

α) να υπολογιστεί η πυκνότητα της μαγνητικής ενέργειας και η συνολική μαγνητική ενέργεια.

β) Πώς μεταβάλλεται το ρεύμα I όταν μεταβληθεί το μήκος l του σωληνοειδούς και γίνει l' ενώ η ακτίνα και ο αριθμός σπειρών παραμείνουν σταθερά;

γ) Πόση δύναμη απαιτείται για την επιμήκυνση του πηνίου;

α) *Επειδή μέσα στο σωληνοειδές* $B = \mu \frac{N}{l} I$ *και έξω από αυτό* $B = 0$ *τότε* $u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu \frac{N^2 I^2}{l^2}$

και $U_m = (\pi\alpha^2 l)u_m = \frac{\mu\pi\alpha^2 N^2 I^2}{2l}$.

β) *Επειδή* $\Delta\Phi = 0$ *και* $\Phi = N\pi\alpha^2 B \Rightarrow \Delta B = 0$. *Άρα* $\frac{I'}{l'} = \frac{I}{l} \Rightarrow I' = I\frac{l'}{l}$

γ) $F = -\left.\frac{\partial U_m}{\partial l}\right|_{\Delta\Phi=0} = -\frac{\mu\pi\alpha^2 N^2}{2}\left(\frac{2I}{l}\frac{\partial I}{\partial l} - \frac{I^2}{l^2}\right) = -\frac{\mu\pi\alpha^2 N^2 I^2}{2l^2}$

14. Ένας λεπτός μεταλλικός δίσκος ειδικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας σ [S/m] τοποθετείται κάθετα στις δυναμικές γραμμές ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $B = B_o\sin\omega t$ [T]. Να υπολογίσετε την πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος που επάγεται στον δίσκο συναρτήσει της απόστασης από τον άξονά του.

Σύμφωνα με τον νόμο του Faraday

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{s} \Rightarrow 2\pi r\left|\vec{E}\right| = \omega B_o\cos(\omega t)\pi r^2 \Rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{r\omega B_o\cos(\omega t)}{2}\left[\frac{V}{m}\right],$$

όπου C οποιαδήποτε κλειστή κυκλική καμπύλη πάνω στην επιφάνεια του δίσκου με κέντρο τον άξονα του δίσκου και ακτίνα r, *ενώ* A *είναι η επιφάνεια που περιγράφεται από την καμπύλη. Η διεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι αζιμουθιακή. Άρα η πυκνότητα του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος είναι* $\vec{j} = \sigma\vec{E} \Rightarrow \left|\vec{j}\right| = \frac{\sigma r\omega B_o\cos(\omega t)}{2}\left[\frac{A}{m^2}\right]$.

15. Σωληνοειδές μήκους x [m], ακτίνας α = x με πλήθος σπειρών N_1 είναι τοποθετημένο αξονικά στο εσωτερικό ενός άλλου σωληνοειδούς μήκους L >> x, της ίδιας ακτίνας α και με πλήθος σπειρών N_2. Το εσωτερικό σωληνοειδές διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1 [A]. Πόση είναι η συνολική μαγνητική ροή που διέρχεται από το εξωτερικό σωληνοειδές;

(ΠΡΟΣΟΧΗ! Δεν μπορείτε να θεωρήσετε ότι το εσωτερικό σωληνοειδές είναι απείρου μήκους.)

Επειδή είναι σχετικά δύσκολο να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο B_1 *που δημιουργείται στο εσωτερικό* *σωληνοειδές (1) και κατ' επέκταση η μαγνητική ροή Φ_{21} που διέρχεται από το εξωτερικό σωληνοειδές (2), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\Phi_{21} = M_{21}I_1$ λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση του Neumann ($M_{21} = M_{12}$). Έτσι υποθέτοντας ότι το εξωτερικό σωληνοειδές, που θεωρείται απείρου μήκους ($L >> a$), διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_2 προκύπτει ότι η μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του είναι $B_2 = \mu_o \dfrac{N_2}{L} I_2$. Η μαγνητική ροή*

$$\Phi_{12} = M_{12}I_2 = N_1 S_1 B_2 = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi a^2}{L} I_2 \Rightarrow M_{12} = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi a^2}{L}. \text{ Άρα } \Phi_{21} = M_{21}I_1 = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi a^2}{L} I_1.$$

16. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα σε ένα μη μαγνητικό υλικό ($\mu = \mu_o$) περιγράφεται από τη σχέση $\vec{E} = (1+j)\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j\omega t}\vec{z}_o \left[\frac{V}{m}\right]$, όπου α [m] χαρακτηριστική σταθερά του υλικού. Να προσδιοριστούν η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα σ και η ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε του υλικού.

Τα χαρακτηριστικά του υλικού προκύπτουν αν υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο από τη δεύτερη εξίσωση του Maxwell (νόμος Faraday) και κατόπιν χρησιμοποιηθεί η τέταρτη εξίσωση (νόμος Ampere - Maxwell). Έτσι

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\nabla \times \vec{E}}{j\omega} = \frac{1}{j\omega}\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{y}_o = \frac{1+j}{j\omega}\frac{\pi}{a}\cos(\frac{\pi}{a}x)e^{j\omega t}\vec{y}_o$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o(\vec{j} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x}\vec{z}_o = \mu_o(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E} \Rightarrow$$

$$-\frac{1+j}{j\omega}\frac{\pi^2}{a^2}\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j\omega t}\vec{z}_o = \mu_o(\sigma + j\omega\varepsilon)(1+j)\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j\omega t}\vec{z}_o \Rightarrow$$

$$\frac{j}{\mu_o \omega}\frac{\pi^2}{a^2} = \sigma + j\omega\varepsilon \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ και } \varepsilon = \frac{\pi^2}{\mu_o \omega^2 a^2}$$

17. Επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα ($\vec{E}_i = E_o e^{j(\omega t - kz)}\vec{x}_o[V/m]$, $\vec{H}_i = H_o e^{j(\omega t - kz)}\vec{y}_o[A/m]$) διαδιδόμενο στο κενό προσπίπτει κάθετα στην επίπεδη επιφάνεια ενός διηλεκτρικού υλικού, η ηλεκτρική επιτρεπτότητα του οποίου είναι ε [F/m], η μαγνητική διαπερατότητα $\mu = \mu_o$ και η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα σ = 0 S/m. Μέσα στο υλικό σε απόσταση d από τη διαχωριστική επιφάνεια βρίσκεται στο επίπεδο xz ένα τετραγωνικό συρμάτινο πλαίσιο, οι πλευρές του οποίου έχουν μήκος α [m]. Να προσδιοριστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο πλαίσιο.

Δεδομένου ότι το υλικό είναι διηλεκτρικό χωρίς απώλειες (σ=0) τότε η ένταση του μαγνητικού πεδίου *μέσα στο υλικό δίνεται από τη σχέση (σελ. 257 του βιβλίου)* $\vec{H}_t = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_o}} H_o e^{j(\omega t-\beta z)}\vec{y}_o$ *όπου* $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_o}$. *Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο συρμάτινο πλαίσιο θα είναι*

$$\mathcal{E} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}\cdot d\vec{s} = -\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_o}}\mu_o H_o (j\omega) e^{j\omega t}\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{d-a/2}^{d+a/2} e^{-j\beta z}dz = \frac{4aH_o\sqrt{\mu_o}}{\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_o}}\sin(\frac{\beta a}{2})e^{j(\omega t-\beta d-\pi/2)}[V].$$

18. Τι είδους υλικό θα χρησιμοποιούσατε προκειμένου να προστατέψετε ένα χώρο από την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Το υλικό που θα χρησιμοποιηθεί στη θωράκιση έναντι της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας πρέπει να παρουσιάζει ελάχιστο επιδερμικό βάθος δηλ. πολύ υψηλή ηλεκτρική αγωγιμότητα (σ) και μαγνητική διαπερατότητα (μ). Συνεπώς κατάλληλο υλικό θα είναι ένα μαλακό σιδηρομαγνητικό μέταλλο όπως ο σίδηρος (βλ. πίνακα στη σελ. 253 του βιβλίου).

19. Θεωρώντας την ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα σ ενός κυλινδρικού αγωγού, μήκους L και διατομής S, σταθερή σε ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων (της τάξης των GHz), παραμένει το ίδιο σταθερά και η ηλεκτρική αντίσταση του αγωγού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η αντίσταση του αγωγού δίνεται από τη σχέση R=L/σS. Τόσο η αγωγιμότητα όσο και το μήκος του αγωγού είναι ανεξάρτητα της συχνότητας. Όσο αυξάνεται όμως η τελευταία τόσο ελαττώνεται το επιδερμικό βάθος με άλλα λόγια ελαττώνεται η επιφάνεια της διατομής του αγωγού που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Άρα αυξάνεται η ηλεκτρική αντίσταση του αγωγού συναρτήσει της συχνότητας.

20. Φορτίο q βρίσκεται ακίνητο σε απόσταση r από τον άξονα ενός σωληνοειδούς "απείρου μήκους" και ακτίνας R, όταν η μαγνητική επαγωγή εντός του τελευταίου αρχίζει να μεταβάλλεται με ρυθμό $\partial\vec{B}/\partial t$. Να υπολογιστεί η αρχική δύναμη που υφίσταται το φορτίο συναρτήσει της απόστασης r, στην περίπτωση που το φορτίο βρίσκεται εντός και εκτός του σωληνοειδούς.

Εφόσον το φορτίο είναι αρχικά ακίνητο η δύναμη που υφίσταται είναι $\vec{F} = q\vec{E}$*, όπου η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου υπολογίζεται από την εξίσωση* $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$. *Κατ' αρχήν εφόσον το σωληνοειδές θεωρείται "απείρου μήκους", τόσο η μαγνητική επαγωγή* $\vec{B}$ *όσο και ο ρυθμός* *μεταβολής της* $\partial\vec{B}/\partial t$ *είναι εντός του σωληνοειδούς διάφορα του μηδενός και παράλληλα του άξονά του, ενώ εκτός του σωληνοειδούς ίσα με μηδέν. Λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρία του προβλήματος η* $\vec{E}$ *και κατ' επέκταση η* $\vec{F}$ *είναι αζιμουθιακή. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes η εξίσωση μετασχηματίζεται στην* $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S (-\partial\vec{B}/\partial t)\cdot d\vec{s}$ *όπου C κύκλος ακτίνας r, το επίπεδο του οποίου είναι κάθετο στον άξονα του σωληνοειδούς και το κέντρο του πάνω στον τελευταίο, ενώ S η επιφάνεια του C. Η φορά διαγραφής του κύκλου επιλέγεται τέτοια ώστε το διάνυσμα της επιφάνειάς του να είναι παράλληλο του* $f\vec{B}/ft$.

Εάν $r < R$ *τότε η εξίσωση καταλήγει στην* $2\pi r|\vec{E}| = \pi r^2 \dfrac{\partial|\vec{B}|}{\partial t} \Rightarrow |\vec{F}| = \dfrac{qr}{2}\dfrac{\partial|\vec{B}|}{\partial t}$

Εάν $r > R$ *τότε η εξίσωση καταλήγει στην* $2\pi r|\vec{E}| = \pi R^2 \dfrac{\partial|\vec{B}|}{\partial t} \Rightarrow |\vec{F}| = \dfrac{qR^2}{2r}\dfrac{\partial|\vec{B}|}{\partial t}$.

Και στις δύο περιπτώσεις η φορά της $\vec{E}$ *και κατ' επέκταση της* $\vec{F}$ *είναι αντίθετη της φορά διαγραφής του κύκλου.*

21. Σε ένα ακίνητο φορτίο εφαρμόζεται κατάλληλη δύναμη $\vec{F}(t)$ προκειμένου αυτό να διανύσει απόσταση μήκους s με σταθερή επιτάχυνση a και αμέσως μετά απόσταση του ίδιου μήκους με σταθερή επιβράδυνση a. Να υπολογιστεί το συνολικό έργο που προσφέρθηκε στο φορτίο.

Δεδομένου ότι η αρχική και η τελική κατάσταση του φορτίου είναι η ίδια, δηλ. δεν μεταβλήθηκε η κινητική του ενέργεια, όλο το έργο που προσφέρθηκε "μετατράπηκε" σε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Έτσι χρησιμοποιώντας τη σχέση 7-31 του βιβλίου, το συνολικό έργο που προσφέρθηκε είναι $W = \dfrac{\mu_o q^2 a^2 \tau}{6\pi c}$ *όπου* $\tau = \sqrt{\dfrac{2s}{a}}$ *ο χρόνος κατά τον οποίο επιταχύνθηκε ή επιβραδύνθηκε το φορτίο.*

22. Μεταλλικό έλασμα "απεριόριστου μήκους" ως προς τη διεύθυνση $\vec{x}_o$ και πλάτους d ως προς τη διεύθυνση $\vec{y}_o$ κινείται με ταχύτητα $u\vec{x}_o$ μέσα σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής $B\vec{z}_o$. Να υπολογιστεί η διαφορά δυναμικού που αναπτύσσεται μεταξύ των ακμών του ελάσματος. Εάν συνδεθούν οι δύο ακμές του ελάσματος με έναν πολύ καλό και σχετικά με τις διαστάσεις του ελάσματος μικρού μήκους αγωγό, πόση θα ήταν η διαφορά δυναμικού;

Και στις δύο περιπτώσεις $\Delta V = uBd$

23. Μέσα σε ένα υλικό με σταθερές ε και μ αναπτύσσεται ηλεκτρικό πεδίο της μορφής $\vec{E} = (\vec{x}_o + i\vec{y}_o)\sin(at + bz)$. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των σταθερών a και b ώστε το συγκεκριμένο πεδίο να χαρακτηριστεί ηλεκτρομαγνητικό κύμα;

Το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος υπακούει στη διαφορική εξίσωση $\nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$. *Αντικαθιστώντας στην εξίσωση τη x-συνιστώσα του πεδίου που δίνεται στην άσκηση προκύπτει* $-b^2\sin(at + bz) + a^2\mu\varepsilon\sin(at + bz) = 0 \Rightarrow b = a\sqrt{\mu\varepsilon}$ *που είναι το ζητούμενο. Στην ίδια σχέση θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε τη y-συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου.*

24. Ηλεκτρομαγνητικό κύμα έντασης $\vec{E} = E_o e^{i(6.28\cdot 10^8 t - 2.09z)}\vec{x}_o$ διαδίδεται στο κενό και προσπίπτει στη θέση $z = 0$ σε μεταλλικό φύλλο χαλκού ($\mu = \mu_o, \sigma = 5.8\cdot 10^7 S/m$) πάχους d (κατά τη διεύθυνση $\vec{z}_o$, πλάτους w (κατά τη διεύθυνση $\vec{y}_o$) και απεριόριστου μήκους (κατά τη διεύθυνση $\vec{x}_o$). Εάν το πάχος d είναι κατά πολύ μεγαλύτερο του επιδερμικού βάθους να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το φύλλο.

Υπόδειξη: Στις συνοριακές συνθήκες χρησιμοποιείστε για τον χαλκό $\varepsilon_{Cu} = \varepsilon_o(1 - j\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_o})$.

Στην διαχωριστική επιφάνεια κενού - χάλκινου φύλλου ισχύει η σχέση των πλατών $\dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_o}}{\sqrt{\varepsilon_o} + \sqrt{\varepsilon_{Cu}}}$. *Επειδή* $\varepsilon_{Cu} = \varepsilon_o(1 - j\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_o})$ *και* $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_o} = 1.043\cdot 10^{10}$ *ουσιαστικά* $\varepsilon_{Cu} = -j\dfrac{\sigma}{\omega}$ *και* $|\varepsilon_{Cu}| >> \varepsilon_o$. *Έτσι* $\dfrac{E_t}{E_i} = 2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_o}{\varepsilon_{Cu}}} = 2\sqrt{\dfrac{j\omega\varepsilon_o}{\sigma}} = 2\sqrt{\dfrac{\omega\varepsilon_o}{\sigma}}e^{j\frac{\pi}{4}}$ *και* $\vec{E}_t = 2\sqrt{\dfrac{\omega\varepsilon_o}{\sigma}}E_o e^{-az + j(6.28\cdot 10^8 t - bz + \frac{\pi}{4})}\vec{x}_o$ *όπου* $a = b = \sqrt{\dfrac{\omega\mu_o\sigma}{2}}$. *Το ρεύμα που θα διαρρέει το φύλλο θα είναι* $I = \int_0^w\int_0^d \sigma|\vec{E}_t|\,dydz = \dfrac{E_o w}{60\pi}e^{j6.28\cdot 10^8 t}$ *δεδομένου ότι* $e^{-ad} \cong 0$.

25. Ένας λεπτός αγώγιμος δίσκος πάχους h, διαμέτρου d και αγωγιμότητας σ τοποθετείται

μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής $B = B_o \sin\omega t$ παράλληλης προς τον άξονά του.

α) Να υπολογιστεί η πυκνότητα του επαγόμενου ρεύματος συναρτήσει της απόστασης από τον άξονα του δίσκου.

β) Πόση θα είναι η ένταση του επαγόμενου ρεύματος που διαρρέει μια διατομή κάθετη στον άξονα του δίσκου;

α) Λόγω της συμμετρίας του συστήματος, από τον νόμο του Faraday ($\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$) προκύπτει εύκολα ότι η ένταση του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου έχει αζιμουθιακή διεύθυνση και μέτρο $\left|\vec{E}\right| = -rB_o\omega\cos\omega t/2$ [V / m]. Συνεπώς η πυκνότητα του επαγόμενου ρεύματος θα έχει διεύθυνση αζιμουθιακή και μέτρο $\left|\vec{j}\right| = -\sigma r B_o\omega\cos\omega t/2$ [A/m^2].

β) Εφόσον η διεύθυνση του ρεύματος είναι αζιμουθιακή και η διεύθυνση της διατομής είναι παράλληλη στον άξονα του δίσκου τότε η ένταση του ρεύματος μέσω αυτής της διατομής ($I = \int_A \vec{j}\cdot d\vec{s}$) είναι ίση με μηδέν.

26. Ευθύγραμμος αγωγός περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από ένα σημείο του Ο, σε επίπεδο κάθετο στις δυναμικές γραμμές ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου επαγωγής B. Εάν το σημείο Ο απέχει από τα άκρα του αγωγού αποστάσεις ℓ_1 και ℓ_2, να υπολογιστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στον αγωγό.

Θεωρείστε ένα σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο περιστροφής της ράβδου Ο. Το επίπεδο περιστροφής είναι το xy και η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου η $\vec{z}_o$. Στα φορτία των δύο τμημάτων της ράβδου αναπτύσσεται δύναμη Laplace ίση με $\vec{F} = q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$. Επειδή η ταχύτητα της ράβδου είναι αζιμουθιακή, η διεύθυνση της δύναμης θα είναι ακτινική. Η φορά της δύναμης εξαρτάται από τη φορά περιστροφής της ράβδου. Έτσι αν η ράβδος περιστρέφεται δεξιόστροφα τότε η φορά της δύναμης είναι προς το κέντρο περιστροφής Ο. Τούτο σημαίνει ότι και στα δύο τμήματα της ράβδου τα θετικά φορτία θα κινηθούν προς το σημείο Ο. Εάν η ράβδος περιστρέφεται αριστερόστροφα τότε τα θετικά φορτία θα κινηθούν προς τα άκρα της ράβδου. Και στις δύο περιπτώσεις περιστροφής τα φορτία στα δύο τμήματα της ράβδου κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις. Συνεπώς οι ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις στα δύο τμήματα είναι αντίθετες και πρέπει να αφαιρεθούν. Στο τμήμα της ράβδου με μήκος ℓ_1 η ηλεκτρεγερτική δύναμη θα είναι ίση με $\varepsilon_1 = \int_O^A (\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot d\vec{r} = \int_0^{\ell_1}\omega B r dr = \frac{\omega B\ell_1^2}{2}$, *ενώ στο τμήμα με μήκος* ℓ_2 *ίση με* $\varepsilon_2 = \int_O^B (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{\ell_2} \omega B r dr = \frac{\omega B \ell_2^2}{2}$. *Η συνολική ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι ίση με* $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\omega B}{2}(\ell_1^2 - \ell_2^2)$.

27. Σημειακό φορτίο q κινούμενο με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon \vec{x}_o$ πλησιάζει παρατηρητή ευρισκόμενο στη θέση (x_π, y_π). Τη χρονική στιγμή t κατά τη οποία το φορτίο βρίσκεται στη θέση (x_π,0) ο παρατηρητής "αντιλαμβάνεται" αριθμητικό δυναμικό φ. Να υπολογιστεί η τιμή του φ.

Το δυναμικό φ *που "αντιλαμβάνεται" ο παρατηρητής τη χρονική στιγμή* t *οφείλεται στη θέση που βρισκόταν το φορτίο την παρελθούσα χρονική στιγμή* t'. *Από τη θέση αυτή ο παρατηρητής απείχε απόσταση* $\vec{r}' = \upsilon(t - t')\vec{x}_o + y_\pi \vec{y}_o$, *το μέτρο της οποίας είναι επίσης ίσο με* $|\vec{r}'| = c(t - t')$ *δεδομένης της ταχύτητας διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι* $t' = t - \frac{y_\pi}{\sqrt{c^2 - \upsilon^2}}$.

Το δυναμικό $\phi(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{s}$ *όπου* $s = |\vec{r}'| - \frac{\vec{\upsilon} \cdot \vec{r}}{c} = c(t - t') - \frac{\upsilon^2}{c}(t - t') = y_\pi \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}$.

28. Μέσα σε διηλεκτρικό με σταθερές ε, μ_o διαδίδεται ηλεκτρομαγνητικό κύμα εντάσεων $\vec{E} = E_o \cos(\omega t - \beta z)\vec{x}_o$ $[V/m]$ και $\vec{H} = \frac{E_o}{\sqrt{\mu_o/\varepsilon}}\cos(\omega t - \beta z)\vec{y}_o$ $[A/m]$.

α) Να υπολογιστεί η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια σε έναν κυβικό όγκο ακμής d.

β) Τί μήκος πρέπει να έχει η ακμή του κύβου ώστε η ενέργεια να παραμένει σταθερή;

α) Η ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι ίση με

$$U = \iiint \left(\frac{\mu_o |\vec{H}|^2}{2} + \frac{\varepsilon |\vec{E}|^2}{2}\right) dxdydz = \int_0^d dx \int_0^d dy \int_0^d \left[\frac{\mu_o E_o^2}{2\,\mu_o/\varepsilon}\cos^2(\omega t - \beta z) + \frac{\varepsilon E_o^2}{2}\cos^2(\omega t - \beta z)\right]dz =$$

$$= \varepsilon E_o^2 d^2 \int_0^d \cos^2(\omega t - \beta z) dz = \frac{1}{2}\varepsilon E_o^2 d^3 \left(1 - \frac{\sin(2\omega t - 2\beta d) - \sin(2\omega t)}{2\beta d}\right)$$

β) Εάν $2\beta d = 2\pi n$ *δηλ.* $d = n\lambda/2$ *όπου* n *ένας ακέραιος αριθμός και* λ *το μήκος κύματος, τότε η ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου προκύπτει ανεξάρτητη του χρόνου.*

29. Ένα συρμάτινο τετραγωνικό πλαίσιο αποτελείται από μία σπείρα και βρίσκεται στο επίπεδο xy με πλευρές μήκους α παράλληλες προς τις διευθύνσεις $\vec{x}_o$ και $\vec{y}_o$. Στο ίδιο επίπεδο και παράλληλα προς τη διεύθυνση $\vec{x}_o$ βρίσκεται ευθύγραμμος αγωγός "απείρου μήκους" που απέχει απόσταση α από το κέντρο του πλαισίου. Να υπολογιστεί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής των δύο αγωγών.

Εάν ο ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης I τότε δημιουργείται στο χώρο μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\vec{B} = {}^{\mu_o I}\!/_{2\pi r}\,\vec{e}_\varphi$. Η ροή του μαγνητικού πεδίου μέσα από το συρμάτινο πλαίσιο είναι $\Phi = \int_{\alpha/2}^{3\alpha/2} \frac{\mu_o I}{2\pi r}\alpha dr = \frac{\mu_o I\alpha}{2\pi}\ln 3$. Άρα $M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_o \alpha \ln 3}{2\pi}$.

30. Να αιτιολογηθεί γιατί σε έναν υπεραγωγό που διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα η κατανομή του ρεύματος είναι επιφανειακή.

Επειδή σε έναν υπεραγωγό η ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι άπειρη το επιδερμικό βάθος προκύπτει μηδέν.

31. Ένα φορτίο q κινούμενο με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}$ πλησιάζει παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία της κίνησής του. Όταν το φορτίο βρίσκεται σε απόσταση α από τον παρατηρητή ο τελευταίος μετράει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και τη βρίσκει ίση με την ένταση που θα δημιουργούσε από την ίδια απόσταση ένα ακίνητο φορτίο $q' = 3q/4$. Πόση είναι η ταχύτητα του φορτίου q;

Το ισοταχώς κινούμενο φορτίο δημιουργεί στη θέση του παρατηρητή ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{r}\,' - r'\vec{\beta}}{(r' - \vec{\beta}\cdot\vec{r}\,')^3}(1-\beta^2)$ όπου $\vec{r}\,'$ είναι η παρελθούσα απόσταση του παρατηρητή από το φορτίο και $\vec{\beta} = \vec{u}/c$. Η παρελθούσα απόσταση $r' = c\Delta t$, όπου Δt το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε η ακτινοβολία να φθάσει τον παρατηρητή. Στο χρονικό αυτό διάστημα το φορτίο κάλυψε μία απόσταση $u\Delta t$ και έφθασε σε απόσταση α από τον παρατηρητή. Άρα $r' = c\Delta t = a + u\Delta t \Rightarrow \Delta t = \alpha/(c-u)$ και $r' = \alpha/(1-\beta)$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα $\vec{r}\,'$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα διανύσματα προκύπτει το *μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου* $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1-\beta^2}{\alpha^2}$. *Η τιμή αυτή είναι ίση με το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί ένα ακίνητο φορτίο* q' *από την ίδια απόσταση, δηλ. είναι ίση με* $\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3}{4\alpha^2}$. *Εξισώνοντας προκύπτει* $\beta = 1/2$ *και* $u = c/2$.

32. Ένα φορτίο κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$ παράλληλα σε έναν ευθύγραμμο αγωγό "απείρου μήκους" που διαρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I και φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο με γραμμική πυκνότητα λ. Να υπολογιστεί η σχέση μεταξύ των λ και I προκειμένου το κινούμενο φορτίο να διατηρήσει την ομαλή και ευθύγραμμη κίνησή του.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από τον αγωγό είναι $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_o}\vec{e}_r$. *Η σχέση αυτή προκύπτει πολύ εύκολα από το νόμο του Gauss, στην ολοκληρωτική του μορφή, χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από τον αγωγό είναι* $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\phi$. *Η σχέση αυτή προκύπτει επίσης πολύ εύκολα από τον νόμο του Ampere, στην ολοκληρωτική του μορφή, χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες. Πάνω στο φορτίο συνεπώς εξασκείται δύναμη Lorenz* $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{u}\times\vec{B} = \frac{q\lambda}{2\pi r\varepsilon_o}\vec{e}_r - \frac{qu\mu_o I}{2\pi r}\vec{e}_r$, *όπου* r *είναι στη συγκεκριμένη περίπτωση η απόσταση του φορτίου από τον αγωγό. Για να διατηρήσει το φορτίο την ομαλή ευθύγραμμη κίνηση πρέπει η δύναμη Lorenz να είναι ίση με μηδέν, που ισχύει στην περίπτωση όπου* $\lambda = \frac{uI}{c^2}$.

33. Δύο τέλεια αγώγιμα επίπεδα "απεριόριστων διατάσεων" είναι παράλληλα προς το επίπεδο xy ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων και βρίσκονται στις θέσεις $z = 0$ και $z = d$. Στον χώρο μεταξύ των δύο επιπέδων αναπτύσσεται ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με ένταση ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}(z,t) = E_1\cos(\omega t + \beta z)\vec{x}_o + E_2\cos(\omega t - \beta z)\vec{x}_o$

Να προσδιοριστούν οι επιτρεπτές τιμές της συχνότητας του πεδίου και να υπολογιστεί η αντίστοιχη ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{H}(z,t)$.

Πάνω στα αγώγιμα επίπεδα η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίση με μηδέν. Δηλ. σύμφωνα με τη δεδομένη μορφή του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει $E_x(0,t) = E_x(d,t) = 0$. *Από τις*

δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι $E_1 = -E_2$ *και* $\sin(\beta d) = 0 \Rightarrow \beta = n\dfrac{\pi}{d} \Rightarrow f = n\dfrac{c}{2d}$. *Έτσι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα δίνεται από τη σχέση* $\vec{E}(z,t) = 2E_2 \sin(n\pi \dfrac{ct}{d})\sin(n\pi \dfrac{z}{d})\vec{x}_o$.
Χρησιμοποιώντας το νόμο του Faraday προκύπτει ότι $\dfrac{d\vec{H}}{dt} = -\dfrac{\nabla \times \vec{E}}{\mu_o} = -\dfrac{1}{\mu_o}\dfrac{\partial E_x}{\partial z}\vec{y}_o$. *Από τη σχέση αυτή, κατόπιν μερικής παραγώγισης ως προς* z *και ολοκλήρωσης ως προς* t *προκύπτει ότι* $\vec{H}(z,t) = \dfrac{E_2}{60\pi}\cos(n\pi\dfrac{ct}{d})\cos(n\pi\dfrac{z}{d})\vec{y}_o$.

34. Σύμφωνα με τον νόμο του Lenz, η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα εξ αιτίας της χρονικά μεταβαλλόμενης μαγνητικής ροής αντιτάσσεται στο αίτιο της δημιουργίας της. Να περιγράψετε την εφαρμογή του νόμου στην περίπτωση που πλησιάζουμε ή απομακρύνουμε ένα αγώγιμο πλαίσιο σε ή από έναν μόνιμο μαγνήτη. Τι δυνάμεις ασκούνται σε κάθε μία περίπτωση;

Καθώς πλησιάζουμε το αγώγιμο πλαίσιο στον μόνιμο μαγνήτη αυξάνεται η ροή του μαγνητικού πεδίου από την επιφάνεια του πλαισίου, με αποτέλεσμα να αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη και κατ' επέκταση το πλαίσιο να διαρρέται από ηλεκτρικό ρεύμα. Σύμφωνα με τον νόμο του Lenz, το επαγόμενο ρεύμα θα έχει τέτοια φορά ώστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί να είναι αντίθετης φοράς από αυτό του μόνιμου μαγνήτη για να περιοριστεί η αύξηση της μαγνητικής ροής. Η δύναμις που αναπτύσσεται μεταξύ του μόνιμου μαγνήτη και του πλαισίου είναι απωστική διότι τα δύο μαγνητικά πεδία (μόνιμου μαγνήτη και επαγόμενο) είναι αντίθετης φοράς ή τα δύο ρεύματα (ρεύμα Ampere του μόνιμου μαγνήτη και επαγόμενο ρεύμα στο πλαίσιο) είναι αντίρροπα.
Καθώς απομακρύνουμε το αγώγιμο πλαίσιο από τον μόνιμο μαγνήτη ελαττώνεται η ροή του μαγνητικού πεδίου από την επιφάνεια του πλαισίου, με αποτέλεσμα να αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη και κατ' επέκταση το πλαίσιο να διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Σύμφωνα με τον νόμο του Lenz, το επαγόμενο ρεύμα θα έχει τέτοια φορά ώστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί να είναι της ίδιας φοράς με αυτό του μόνιμου μαγνήτη για να περιοριστεί η ελάττωση της μαγνητικής ροής. Η δύναμις που αναπτύσσεται μεταξύ του μόνιμου μαγνήτη και του πλαισίου είναι ελκτική διότι τα δύο μαγνητικά πεδία είναι της ίδιας φοράς ή τα δύο ρεύματα είναι ομόρροπα.
Και στις δύο περιπτώσεις οι δυνάμεις αντιτίθενται στη μετακίνηση του πλαισίου.

35. "Απείρου" μήκους αγωγός παράλληλος προς τη διεύθυνση $\vec{z}_o$ διαρρέεται από ρεύμα έντασης

I. Ένας δεύτερος αγωγός μήκους d, κάθετος στον πρώτο και παράλληλος προς τη διεύθυνση $\vec{y}_o$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{z}_o$. Εάν το μέσον του δεύτερου αγωγού απέχει από τον πρώτο απόσταση $a + d/2$ να υπολογίσετε την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στον δεύτερο αγωγό.

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ampere ($\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{j}$) *υπολογίζεται η μαγνητική επαγωγή στον άξονα* y *(όπου βρίσκεται ο δεύτερος αγωγός)* $\vec{B} = -\frac{\mu_o I}{2\pi y}\vec{x}_o$. *Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στον δεύτερο αγωγό θα είναι ίση με* $\varepsilon = \int_C (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_a^{a+d} -(\upsilon\vec{z}_o \times \frac{\mu_o I}{2\pi y}\vec{x}_o) \cdot (dy\vec{y}_o) = -\frac{\mu_o I \upsilon}{2\pi}\ln(\frac{a+d}{a})$.

36. Είναι γνωστό ότι η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου (U_m) που δημιουργεί ένα πηνίο είναι ίση με $\frac{1}{2}LI^2$. Να δείξετε ότι αν ένα σωληνοειδές πηνίο "απείρου" μήκους διερρέεται από χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα, τότε η συνολική ροή της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από την επιφάνεια του πηνίου είναι ίση με $-dU_m/dt$.

Η μαγνητική επαγωγή μέσα σε ένα σωληνοειδές πηνίο "απείρου" μήκους δίνεται από την σχέση $\vec{B} = \mu_o n I \vec{e}_z$ *(χρησιμοποιούνται κυλινδρικές συντεταγμένες), ενώ έξω από το πηνίο είναι ίση με 0. Εφόσον το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι χρονικά μεταβαλλόμενο τότε σύμφωνα με τον νόμο του Faraday* ($\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$) *δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο έντασης* $\vec{E} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\vec{e}_\phi$. *Το διάνυσμα Poynting θα είναι ίσο με* $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = -\frac{\mu_o n^2 r}{2} I \frac{dI}{dt}\vec{e}_r$. *Επειδή το διάνυσμα Poynting είναι ακτινικό η ροή της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από τις βάσεις του πηνίου είναι ίση με 0. Από την παράπλευρη επιφάνεια* A *του πηνίου η ροή της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας θα είναι ίση με* $\iint_A \vec{S} \cdot (d\phi dz \vec{e}_r) = -(\mu_o n^2 \pi R^2 l) I \frac{dI}{dt} = -LI\frac{dI}{dt} = -\frac{dU_m}{dt}$. *Στον όρο μέσα στην παρένθεση,* R *είναι η ακτίνα και* l *είναι το μήκος του πηνίου. Θεωρείται δεδομένο ότι με την έκφραση "απείρου" μήκους χαρακτηρίζουμε τα σωληνοειδή στα οποία ο λόγος* $l/R >> 1$.

37. Ένα αγώγιμο υλικό, η ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά του οποίου καθορίζεται από τις

παραμέτρους ε_o, μ_o και σ, είναι ηλεκτρικά πολωμένο εξ αιτίας της επίδρασης κάποιου εξωτερικού πεδίου. Εάν τη χρονική στιγμή $t = 0$ σταματήσει η επίδραση του εξωτερικού πεδίου να βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει τη χρονική μεταβολή της πυκνότητας του φορτίου. Συμβουλευόμενοι τον πίνακα 8-1 του βιβλίου σας (σελ. 253) να εκτιμήσετε την τάξη μεγέθους του χρόνου που απαιτείται για την αποκατάσταση της ηλεκτρικής ουδετερότητας.

Επειδή το υλικό είναι αγώγιμο, η πόλωσή του, υπό την επίδραση του εξωτερικού, προφανώς ηλεκτρικού, πεδίου, οφείλεται κυρίως στη μετατόπιση των ελεύθερων φορτίων. Όταν σταματήσει η επίδραση του εξωτερικού πεδίου τα ελεύθερα φορτία πρόκειται να μετακινηθούν και πάλι ώστε να μηδενισθεί η πόλωση του υλικού. Η μετακίνηση αυτή οφείλεται στο πεδίο πόλωσης που δημιουργήθηκε από τη συσσώρευση των ελεύθερων φορτίων. Με άλλα λόγια δημιουργείται ένα ρεύμα, η πυκνότητα του οποίου θα είναι, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, *όπου* $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_f / \varepsilon_o$. *Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας* $\nabla \cdot \vec{j} + \dfrac{d\rho_f}{dt} = 0 \Rightarrow \sigma\nabla \cdot \vec{E} + \dfrac{d\rho_f}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\rho_f + \dfrac{d\rho_f}{dt} = 0 \Rightarrow \rho_f = \rho_f^o e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_o}t}$, *όπου* ρ_f^o *η αρχική* $(t = 0)$ *πυκνότητα των ελευθέρων φορτίων. Σε ένα τυπικό αγώγιμο υλικό η ειδική αγωγιμότητα είναι της τάξης του* 10^7 *S/m, συνεπώς ο χρόνος αποκατάστασης* $\dfrac{\varepsilon_o}{\sigma}$ *θα είναι της τάξης του* 10^{-18}*s.*

38. Να δείξετε ότι η περιγραφή ενός μαγνητικού πεδίου ως $\vec{B} = 0.5x\vec{x}_o$ [T] είναι φυσικώς απαράδεκτη.

Μια από τις φυσικές ιδιότητες του μαγνητικού πεδίου είναι ότι η $\nabla\vec{B} = 0$. *Στη συγκεκριμένη περίπτωση η* $\nabla\vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0.5$, *που σημαίνει ότι η περιγραφή είναι λανθασμένη.*

39. Τετραγωνικό συρμάτινο πλαίσιο έχει πλευρές μήκους a παράλληλα στις διευθύνσεις $\vec{x}_o$ και $\vec{y}_o$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, με αρχική ταχύτητα μηδέν, εισάγεται σταδιακά σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\vec{z}_o$ ωθούμενο συνεχώς από σταθερή δύναμη $\vec{F} = F\vec{x}_o$. Εάν η μάζα του πλαισίου είναι m και η ηλεκτρική του αντίσταση R, να βρεθεί η χρονική συνάρτηση που περιγράφει τη μεταβολή της ταχύτητας του πλαισίου έως ότου βρεθεί αυτό εξ'ολοκλήρου μέσα στο μαγνητικό πεδίο.

Καθώς το πλαίσιο εισέρχεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο αναπτύσσεται σ' αυτό ηλεκτρεγερτική δύναμη $\varepsilon = \oint_C (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \upsilon Ba$, *όπου* $\vec{\upsilon} = \upsilon(t)\vec{x}_o$ *είναι η ζητούμενη συνάρτηση. Η επικαμπύλιος ολοκλήρωση πραγματοποιείται με φορά αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου και δίνει αποτέλεσμα διάφορο του μηδενός σε μία από τις δύο πλευρές που είναι παράλληλη στη διεύθυνση* $\vec{y}_o$. *Για την άλλη πλευρά θεωρούμε ότι δεν έχει εισέλθει ακόμα μέσα στο μαγνητικό πεδίο (*$B = 0$*), ενώ για τις πλευρές που είναι παράλληλες στη διεύθυνση* $\vec{x}_o$ *προκύπτει διανυσματικό αποτέλεσμα μηδέν. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη αναπτύσσεται έως ότου το πλαίσιο βρεθεί εξ'ολοκλήρου μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Σ' αυτό το χρονικό διάστημα το πλαίσιο διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης* $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\upsilon B\alpha}{R}$ *και φοράς αυτής των δεικτών του ωρολογίου. Εξ αιτίας του ρεύματος ασκούνται στο τμήμα του πλαισίου που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίου δυνάμεις Laplace, οι οποίες είναι κάθετες στις πλευρές και έχουν φορά από τις πλευρές προς το κέντρο του πλαισίου. Η δύναμη που επηρεάζει την κίνηση του πλαισίου είναι αυτή που ασκείται στην πλευρά που είναι παράλληλη της διεύθυνσης* $\vec{y}_o$ *και είναι η* $\vec{F}_L = \int_0^a -Idy\vec{y}_o \times \vec{B} = -aIB\vec{x}_o = -\frac{a^2B^2}{R}\upsilon\vec{x}_o$. *Έτσι η συνολική δύναμη που ασκείται στο πλαίσιο είναι* $\vec{F}_t = \vec{F} + \vec{F}_L$ *και η εξίσωση της κίνησής του* $m\frac{d\upsilon}{dt} = F - \frac{a^2B^2}{R}\upsilon$. *Από τη λύση της εξίσωσης αυτής προκύπτει* $\upsilon(t) = \frac{FR}{a^2B^2}(1 - e^{-\frac{a^2B^2}{mR}t})$.

40. Πηγή laser συχνότητας 10^{15} Hz και ισχύος 500/6 W εκπέμπει στο κενό δέσμη διαμέτρου 1 mm^2. Να υπολογίσετε την ενεργό τιμή της πυκνότητας του ρεύματος μετατόπισης.

Η πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης δίνεται από τη σχέση $\vec{j}_D = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. *Δεδομένου ότι η ακτινοβολία είναι μονοχρωματική η ενεργός τιμή της πυκνότητας του ρεύματος μετατόπισης δίνεται από τη σχέση* $j_{Drms} = \varepsilon_o\omega E_{rms}$. *Για τον υπολογισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου χρησιμοποιείται ο τύπος* $< S >= \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{E_{rms}^2}{R} \Rightarrow j_{Drms} = \varepsilon_o\omega\sqrt{\frac{4PR}{\pi d^2}} \approx 10^{10} A/m^2$.

41. Ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους αρχίζει να διαρρέεται κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$

από ρεύμα σταθερής έντασης I. Να υπολογίσετε συναρτήσει του χρόνου τη μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής σε απόσταση r από τον αγωγό. Να βρεθεί η τιμή της μαγνητικής επαγωγής όταν $t \to \infty$ και να συγκριθεί με αυτήν που προκύπτει από τη θεωρία του στατικού μαγνητισμού.

Δίνεται ότι το $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ *και ότι η στροφή ενός διανύσματος σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι* $\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$. *Η λύση της άσκησης αυτής βρίσκεται όσον αφορά τον υπολογισμό του διανυσματικού δυναμικού στη σελίδα 210 του βιβλίου:* $\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_o I}{2\pi}\ln(\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-r^2}}{r})\vec{e}_z$. *Η μαγνητική επαγωγή θα προκύψει από τη σχέση* $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}(1+\frac{1}{ct+\sqrt{c^2t^2-r^2}})\vec{e}_\varphi$, *όπου για* $t \to \infty$ $\vec{B} \to \frac{\mu_o I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$, *δηλ. η μαγνητική επαγωγή τείνει στην ίδια τιμή που θα προέκυπτε εάν εξετάζαμε το πρόβλημα ανεξαρτήτως του χρόνου χρησιμοποιώντας τη θεωρία του στατικού μαγνητισμού.*

42. Υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία διαδιδόμενη σε ένα μέσον έχει ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα διάδοσης του ήχου;

Τούτο συμβαίνει στους αγωγούς, όπου η ταχύτητα διάδοσης δίνεται από τη σχέση $\upsilon = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$. *Εάν θεωρήσουμε ότι* $\mu \approx \mu_o$ *και* $\sigma \approx 10^7 S/m$ *τότε* $\upsilon = \sqrt{f}$. *Στις χαμηλές συχνότητες,* $f < 1MHz$, *η ταχύτητα διάδοσης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας* $\upsilon < 10^3 m/s$, *που είναι μικρότερη από τη ταχύτητα διάδοσης του ήχου στα μέταλλα.*

43. Ένας παρατηρητής παρακολουθεί φορτίο 1nC που απομακρύνεται ισοταχώς από αυτόν με ταχύτητα $\upsilon\vec{x}_o$. Καταγράφοντας το αριθμητικό δυναμικό που οφείλεται στο φορτίο συμπεραίνει ότι μεταβάλλεται χρονικά σύμφωνα με τη σχέση $\varphi = 1/t$ [V]. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του φορτίου.

Χρησιμοποιώντας τη έκφραση Lienard - Wiechert το αριθμητικό δυναμικό εκφράζεται από τη σχέση $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r' - \vec{\beta}\cdot\vec{r}'}$, *όπου* $\vec{r}' = -\upsilon t'\vec{x}_o$, $\vec{\beta} = \frac{\upsilon}{c}\vec{x}_o$ *και* $t' = t - \frac{r'}{c} = t - \frac{\upsilon}{c}t' \Rightarrow t' = \frac{t}{1+\upsilon/c}$. *Άρα*

$\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{\upsilon t'(1+\upsilon/c)} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{\upsilon t}$ *και* $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{\upsilon} = 1 \Rightarrow \upsilon = 9m/s$.

44. Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, του οποίου η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου περιγράφεται από τη σχέση $\vec{E} = E_o\cos(\omega t - \beta z)\vec{x}_o$, προσπίπτει σε ένα σωματίδιο με μάζα m και φορτίο q, που βρίσκεται, κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, ακίνητο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Θεωρώντας την επίδραση της δύναμης Laplace αμελητέα να προσδιορίσετε (α) τη σχέση που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου και (β) την ηλεκτρομαγνητική ισχύ που εκπέμπεται από το σωματίδιο.

(α) Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του φορτίου είναι η $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = qE_o\cos(\omega t)$. *Λύνοντας τη εξίσωση και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες προκύπτει ότι η ταχύτητα του σωματιδίου* $\vec{\upsilon} = \dfrac{qE_o}{m\omega}\sin(\omega t)\vec{x}_o$ *και η θέση του φορτίου δίνεται από τις σχέσεις* $x = \dfrac{qE_o}{m\omega^2}[1-\cos(\omega t)]$, $y = 0$ *και* $z = 0$.

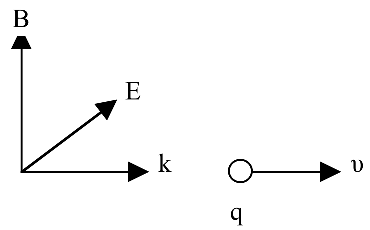
(β) Δεδομένου ότι επιτάχυνση του σωματιδίου $\vec{a} = \dfrac{qE_o}{m}\cos(\omega t)\vec{x}_o$, *σύμφωνα με τη σχέση 7-30 ή 7-45 του βιβλίου (τύπος του Larmor) η μέση τιμή της εκπεμπόμενης από το σωματίδιο ισχύος* $P = \dfrac{q^4E_o^2}{12\pi\varepsilon_o m^2c^3}$ *[W].*

45. Ένας επίπεδος πυκνωτής βρίσκεται φορτισμένος κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ με φορτίο $\pm Q_o$. Μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή υπάρχει διηλεκτρικό υλικό με ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε και ηλεκτρική αγωγιμότητα σ. Θεωρώντας δεδομένο ότι κατά την εκφόρτιση του πυκνωτή ($t > 0$) δεν δημιουργείται μαγνητικό πεδίο, να δείξετε συναρτήσει του χρόνου, ότι ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας (θεώρημα Poynting) στον χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή.

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας (θεώρημα Poynting) εκφράζεται από την εξίσωση $\nabla\cdot\vec{S} + \dfrac{\partial u}{\partial t} + \vec{J}\cdot\vec{E} = 0$. *Δεδομένου ότι κατά την διάρκεια της εκφόρτισης δεν δημιουργείται μαγνητικό πεδίο στο χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή,* $\vec{S} = 0$ *και* $u = \dfrac{\varepsilon E^2}{2}$. *Στον επίπεδο πυκνωτή το* *μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου* $\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q}{A}$, *όπου* A *η επιφάνεια των οπλισμών. Η πυκνότητα ρεύματος* $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. *Τόσο η ένταση όσο και η πυκνότητα του ρεύματος έχουν διεύθυνση κάθετη στους οπλισμούς του πυκνωτή και φορά από τον θετικό στον αρνητικό οπλισμό. Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης του φορτίου (ολοκληρώνοντας δηλ. την εξίσωση της συνέχειας του φορτίου πάνω σε μία κλειστή επιφάνεια που περιλαμβάνει μόνο τον ένα οπλισμό του πυκνωτή) προκύπτει η εξίσωση* $\left|\vec{J}\right|A + \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon}Q + \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow Q = Q_o e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$ *και* $\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_o}{A}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$.

Άρα $\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{J}\cdot\vec{E} = \varepsilon\left|\vec{E}\right|\frac{\partial\left|\vec{E}\right|}{\partial t} + \sigma\left|\vec{E}\right|^2 = -\frac{\sigma Q_o^2}{\varepsilon^2 A^2}e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon}t} + \frac{\sigma Q_o^2}{\varepsilon^2 A^2}e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon}t} = 0$.

46. Ένα φορτίο q κινείται στο κενό με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Κάποια χρονική στιγμή προσπίπτει στο φορτίο ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, η διεύθυνση και φορά διάδοσης του οποίου συμπίπτει με αυτήν της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$. Να δείξετε ότι η δύναμη που ασκείται στο φορτίο εκείνη τη χρονική στιγμή τείνει στο μηδέν, όταν η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τείνει στην ταχύτητα του φωτός.



Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο είναι φυσικά η δύναμη Lorenz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$, *το μέτρο της οποίας κατά τη στιγμή της πρόσπτωσης είναι ίσο με* $F = qE - q\upsilon B = qE(1 - \frac{\upsilon}{c})$. *Από την τελευταία σχέση προκύπτει το ζητούμενο.*

47. Ένα φορτίο q κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ παράλληλα σε έναν ευθύγραμμο αγωγό απεριόριστου θεωρητικά μήκους. Ο αγωγός είναι αφόρτιστος αλλά διαρρέεται από ρεύμα, δεδομένου ότι τα φορτία της αγωγιμότητάς του, τα οποία έχουν πυκνότητα ρ , κινούνται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ίδια με αυτήν του φορτίου q . Να αναφέρετε το είδος της δύναμης που ασκείται μεταξύ του φορτίου q και του αγωγού (α) στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς του αγωγού και (β) στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς του φορτίου q .

Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς του αγωγού η δύναμη που ασκείται μεταξύ του κινούμενου φορτίου και του αγωγού είναι μαγνητοστατική (δύναμη μεταξύ ρευμάτων, δύναμη Laplace) και είναι ελκτική στην περίπτωση που το φορτίο q και η πυκνότητα των φορτίων αγωγιμότητας ρ είναι ομόσημες ποσότητες (παράλληλα ρεύματα). Εφόσον διαχωρίζουμε τα φορτία αγωγιμότητας από τα υπόλοιπα ακίνητα φορτία του αγωγού, τότε ορίζοντας την πυκνότητα των τελευταίων ως ρ_b ισχύει $\rho + \rho_b = 0$, δεδομένου ότι ο αγωγός είναι αφόρτιστος. Για τις δύο κατηγορίες των φορτίων ορίζονται και οι αντίστοιχες πυκνότητες ρεύματος, δηλ. για τα φορτία αγωγιμότητας $j = \rho\upsilon$ και $j_b = 0$.

Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς του φορτίου, το φορτίο είναι προφανώς ακίνητο και η δύναμη που ασκείται μεταξύ αυτού και του αγωγού αποκλείεται να χαρακτηριστεί ως μαγνητοστατική. Η ποσότητα του φορτίου q παραμένει αμετάβλητη σε όλα τα αδρανειακά συστήματα, δεν ισχύει όμως το ίδιο και για τον αγωγό. Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς της πυκνότητας του φορτίου που προτείνει η ειδική θεωρία της σχετικότητας προκύπτει για τα χαρακτηρισμένα (στο προηγούμενο σύστημα αναφοράς) ως φορτία αγωγιμότητας ότι $\rho' = \gamma(\rho - \frac{\upsilon}{c^2} j) = \gamma\rho(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}) = \frac{\rho}{\gamma}$ και για τα χαρακτηρισμένα ως ακίνητα φορτία ότι $\rho_b' = \gamma(\rho_b - \frac{\upsilon}{c^2} j_b) = -\gamma\rho$, όπου $\gamma = 1\big/\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}$.

Προσθέτοντας τις δύο πυκνότητες φορτίου προκύπτει ότι $\rho' + \rho_b' = \frac{\rho}{\gamma} - \gamma\rho = -\frac{\rho}{\gamma}\frac{\upsilon^2}{c^2}$, δηλ. ότι ο αγωγός είναι φορτισμένος. Συνεπώς μεταξύ φορτίου και αγωγού ασκείται ηλεκτροστατική δύναμη (δύναμη Coulomb), η οποία είναι ελκτική στην περίπτωση που το φορτίο q και η πυκνότητα των φορτίων αγωγιμότητας ρ είναι ομόσημες ποσότητες (ετερώνυμα φορτία).

48. Ευθύγραμμος αγωγός απείρου θεωρητικά μήκους είναι ομοιόμορφα φορτισμένος και ταυτόχρονα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Η γραμμική πυκνότητα του φορτίου είναι ίση με λ και η ένταση του ρεύματος ίση με I. Σε κάποια απόσταση από τον αγωγό κινείται ισοταχώς(!) και παράλληλα(!) προς αυτόν ένα σημειακό ομώνυμο φορτίο.

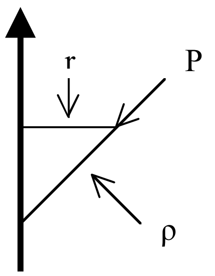
α) Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα του σημειακού φορτίου ώστε να λαμβάνει χώρα το φαινόμενο αυτό;

β) Πώς αντιλαμβάνεται το φαινόμενο ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς του σημειακού φορτίου;

α) Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss και τον νόμο του Ampere προκύπτει εύκολα σε *κυλινδρικές συντεταγμένες ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο αγωγός περιγράφεται από τις σχέσεις* $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_o}\vec{e}_r$ *και* $\vec{B} = \dfrac{\mu_o I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$, *όπου* r *η απόσταση του φορτίου από τον αγωγό. Η δύναμη Lorenz που επιδρά στο σημειακό φορτίο είναι ίση* $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{\upsilon}\times\vec{B} = q(\dfrac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_o} - \dfrac{\upsilon\mu_o I}{2\pi r})\vec{e}_r = \dfrac{q}{2\pi r\varepsilon_o}(\lambda - \dfrac{\upsilon I}{c^2})\vec{e}_r$. *Προκειμένου το φορτίο να κινείται ισοταχώς, η δύναμη* $\vec{F} = 0 \Rightarrow \upsilon = \dfrac{\lambda c^2}{I}$.

β) Στο σύστημα αναφοράς του σημειακού φορτίου ο αγωγός έχει πυκνότητα φορτίου $\rho' = \gamma(\rho - \dfrac{\upsilon}{c^2}j)$, *όπου* ρ *και* j *η πυκνότητα φορτίου και ρεύματος αντίστοιχα στο σύστημα αναφοράς του αγωγού. Επειδή η διατομή του αγωγού* S *είναι η ίδια και στα δύο συστήματα αναφοράς η γραμμική πυκνότητα φορτίου του αγωγού στο σύστημα αναφοράς του φορτίου* $\lambda' = \rho' S = \gamma(\rho - \dfrac{\upsilon}{c^2}j)S = \gamma(\lambda - \dfrac{\upsilon}{c^2}I) = 0$. *Συνεπώς ο παρατηρητής επειδή βλέπει το σημειακό φορτίο ακίνητο, υποθέτει ότι δεν υφίσταται ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο (το μαγνητικό πεδίο δεν ασκεί δύναμη σε ακίνητα φορτία) και πολύ σωστά θεωρεί τον αγωγό αφόρτιστο.*

49. Σε έναν ευθύγραμμο αγωγό απεριόριστου θεωρητικά μήκους εμφανίζεται ταυτόχρονα σε όλο το μήκος του ριπή ρεύματος . Να υπολογιστεί το διανυσματικό δυναμικό.



Το διανυσματικό δυναμικό στο σημείο P είναι $\overline{A}_P = \hat{z}\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{I(t-\rho/c)}{\rho}dz$ *και λόγω συμμετρίας* $\overline{A}_P = \hat{z}\dfrac{\mu_0}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\dfrac{I(t-\rho/c)}{\rho}dz$. *Το ρ είναι συνάρτηση του z και αν λάβουμε υπόψη ότι* $\rho = \sqrt{z^2 + r^2}$, $d\rho = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}dz$, $dz = \dfrac{\rho}{z}d\rho$ *και όταν* $z = 0$ *ή* $z \to \infty$ *τότε* $\rho = r$ *και* $\rho \to \infty$ *αντίστοιχα, το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται και το δυναμικό τελικά υπολογίζεται ως εξής:*

$$\overline{A}_P = \hat{z}\frac{\mu_0 q_0}{2\pi}\int_{r}^{\infty}\frac{\delta(t-\rho/c)}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}d\rho = \hat{z}\frac{\mu_0 q_0}{2\pi}\int_{r}^{\infty}\frac{\delta(t-\rho/c)c}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}d(\rho/c) = \hat{z}\frac{\mu_0 q_0 c}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}}$$